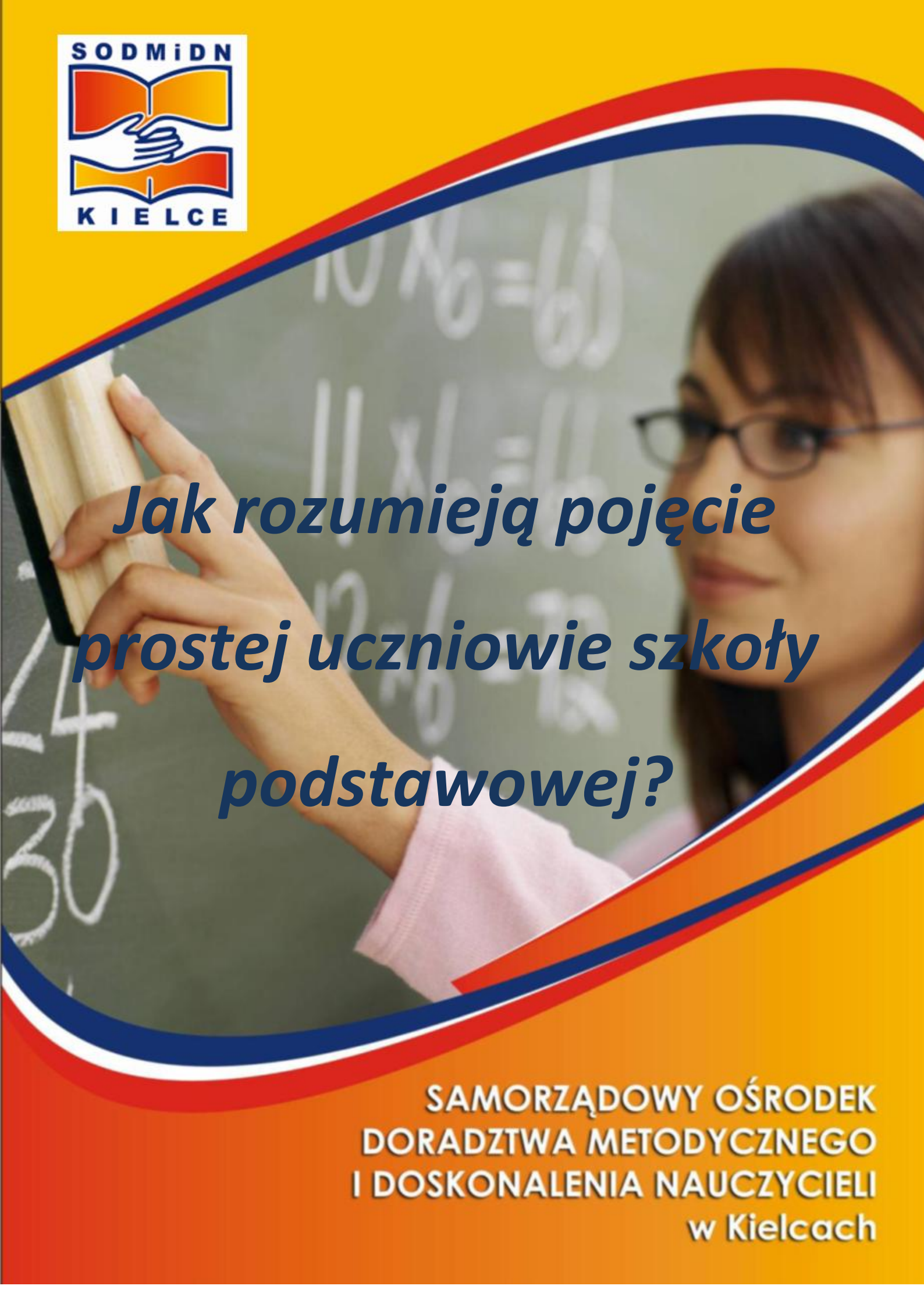




***Jak rozumieją pojęcie
prostej uczniowie szkoły
podstawowej?***

**SAMORZĄDOWY OŚRODEK
DORADZTWA METODYCZNEGO
I DOSKONALENIA NAUCZYCIELI
w Kielcach**

*„Geometria jest sztuką wyciągania prawidłowych wniosków
ze źle sporządzonych rysunków.”*

Niels Henrik Abel

Koleżanki i Koledzy Nauczyciele,

Prosta to obiekt ciekawy, ale abstrakcyjny –zwłaszcza dla ucznia.

Jest to pojęcie geometryczne, a rozumienie tych właśnie pojęć jest jednym z wyznaczników dojrzałości umysłowej uczniów. Jest to pojęcie pierwotne, a więc nie istnieje definicja prostej. Można jedynie opisywać jej własności i związki z innymi pojęciami. To, jak uczeń opanuje dane pojęcie w szkole podstawowej, będzie rzutowało na wykorzystanie go w toku dalszej nauki oraz sytuacjach codziennego życia.

Ukształtowanie tego pojęcia w umyśle dzieci jest trudne. Prosta jest jednowymiarowa, nieograniczona. Nie ma dobrych modeli ją przedstawiających –wszystkie są ograniczone i posiadają „grubość”.

Postanowiłam sprawdzić, jak uczniowie szkoły podstawowej rozumieją pojęcie prostej i w ciągu kilku lat przeprowadzałam sprawdziany wiadomości i umiejętności dla uczniów. Uczniowie rozwiązywali arkusz zawierający 13 zadań. Skupiłam się na próbie uzyskania odpowiedzi na 3 pytania:

- W jakim stopniu uczniowie opanowali pojęcie prostej?
- Czy potrafią się nim poprawnie posługiwać w różnych sytuacjach?
- Jakie występują różnice w rozumieniu tego pojęcia przez dzieci między 11 a 15 rokiem życia?

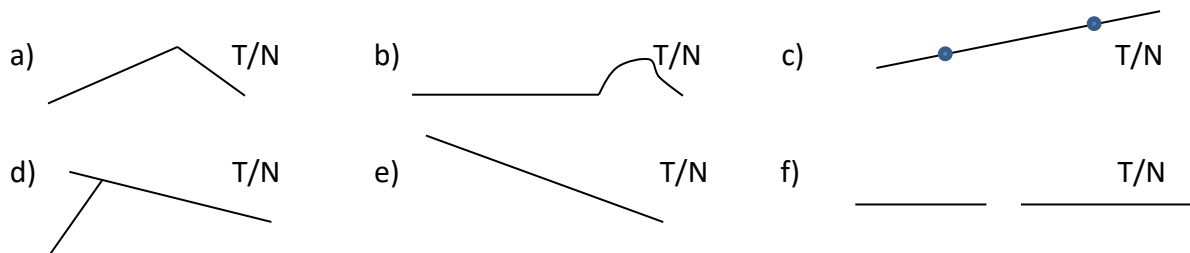
Zapraszam do lektury

Anna Sikorska

*doradca metodyczny w zakresie matematyki
w Samorządowym Ośrodku Doradztwa Metodycznego
i Doskonalenia Nauczycieli w Kielcach*

Zadanie 1

Zaznacz, które rysunki przedstawiają prostą. Podkreśl T –jeśli jest to prosta, a N –jeśli rysunek nie przedstawia prostej.



Każdą z prostych przedstawionych na rysunku przedłuż.

Zadanie 2

Narysuj prostą przechodzącą przez punkty A i B. Czy możesz narysować inną prostą przechodzącą przez te dwa punkty?

A •

B •

Odp:

Zad 3

Narysuj i oznacz symbolicznie:

a) prostą

b) odcinek

c) figurę, która nie jest prostą

d) linię, która nie jest prostą

Zadanie 4

Zaznacz 3 różne punkty A, B, C. Ile prostych możesz narysować, które przechodzą przez te 3 punkty równocześnie?

Odp:

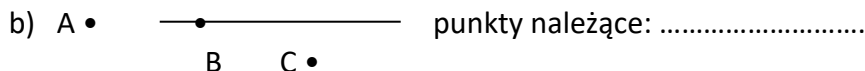
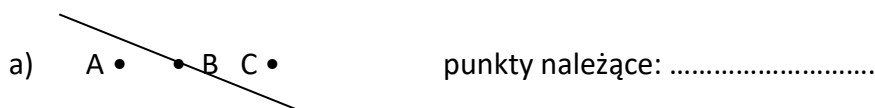
Zadanie 5

Spośród pogrubionych wyrazów skreśl niewłaściwe:

Przez każde 3 różne punkty M, N, P jednocześnie można zawsze poprowadzić jedną, dwie, dziesięć, znacznie więcej prostych.

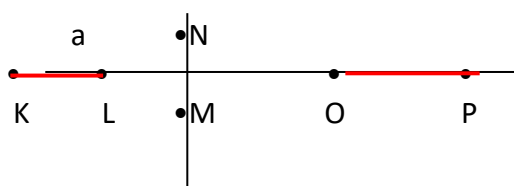
Zadanie 6

Wypisz punkty, które należą do danej prostej:



Zadanie 7

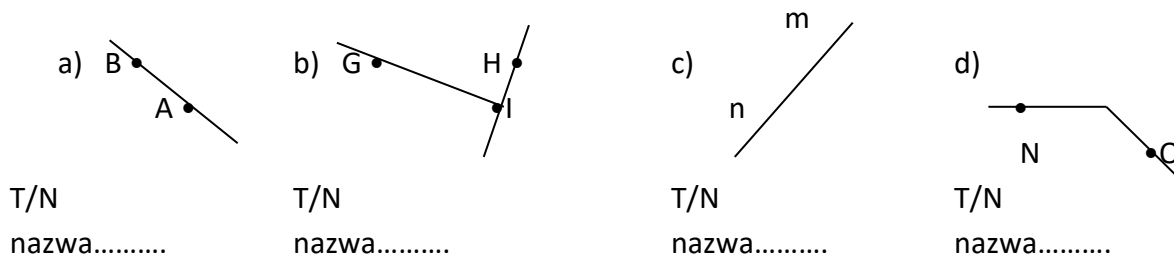
Odczytaj z rysunku, które odcinki zawierają się w prostej a. Jeśli odcinek zawiera się w prostej - podkreśl T, jeśli odcinek nie zawiera się w prostej - podkreśl N.



odcinek KL	T/N
odcinek MN	T/N
odcinek OP	T/N

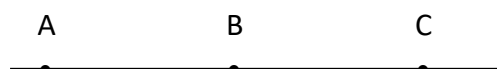
Zadanie 8

Czy rysunki przedstawiają proste? Podkreśl T, jeśli odpowiedź brzmi tak, podkreśl N, jeśli nie jest to prosta. Jeśli rysunek przedstawia prostą, zapisz jej nazwę.



Zadanie 9

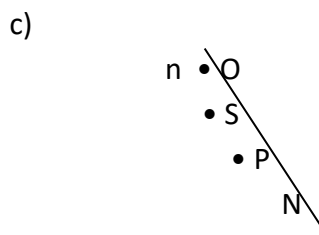
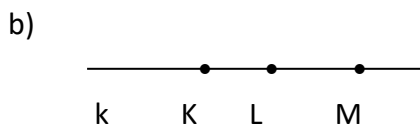
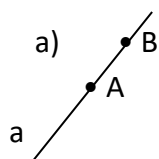
Nazwij i oznacz symbolicznie figury przedstawione na rysunku:



nazwa	symbol

Zadanie 10

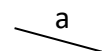
Jak możesz nazwać proste na rysunkach? Uzupełnij tabelę.



Zadanie 11

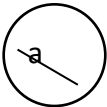
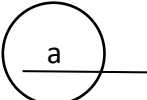
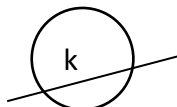
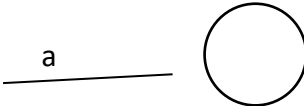
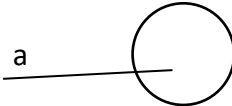
a) Rysunek przedstawia prostą.

Narysuj okrąg (jeśli potrafisz), w którym ta prosta się zawiera.



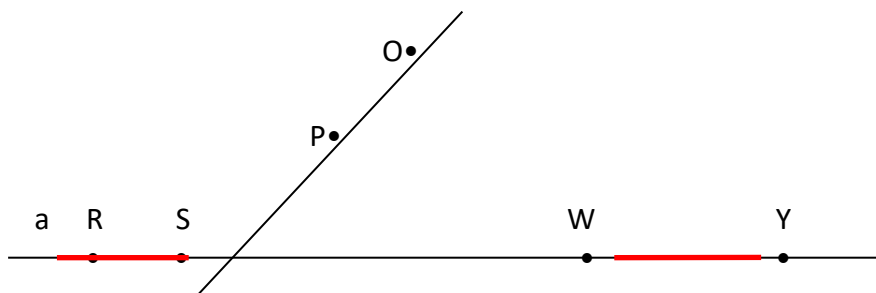
Napisz, jak to zrobiłeś:

b) W tabeli przedstawiono wypowiedzi uczniów. Oceń, czy są one prawdziwe czy fałszywe –wstaw znak X w odpowiednie pole.

Wypowiedź ucznia	Prawda	Fałsz
Prostą a zawarłem w kole 		
Prosta a tylko z jednej strony „nie mieści” się w kole 		
Dopiero tak przedłużona prosta k „wychodzi” poza koło 		
Nie mogę narysować koła, W którym prosta a się zawiera 		
Prosta a nie zawiera się w kole 		
Prosta a nie zawiera się w kole 		

Zadanie 12

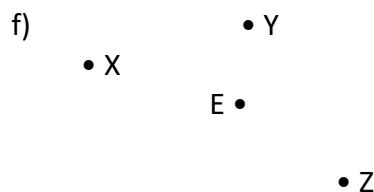
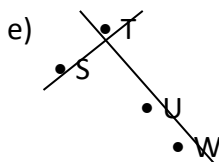
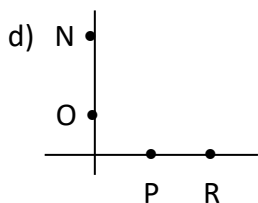
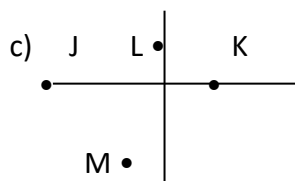
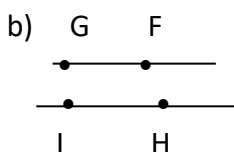
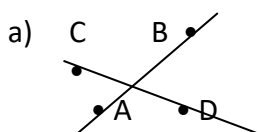
Które z półprostych zawierają się, a które nie zawierają się w prostej a ? Uzupełnij tabelę, wstawiając X w odpowiednie pole.



Półprosta	Zawiera się	Nie zawiera się
o początku S przechodząca przez R		
o początku O przechodząca przez P		
o początku W przechodząca przez Y		
o początku P przechodząca przez O		
o początku R przechodząca przez S		

Zadanie 13

Zaznacz na rysunkach i nazwij punkty przecięcia opisanych w tabeli prostych.



Uzupełnij tabelę:

Proste	Przecinają się		Ich punkt przecięcia
	Tak	Nie	
AB i CD			
FG i HI			
JK i LM			
NO i PR			
ST i UW			
XY i ZE			

Zadania zostały skonstruowane w ten sposób, aby obejmowały poszczególne aspekty rozumienia prostej, a więc:

1. Reprezentacja graficzna prostej
2. Oznaczenia symboliczne
3. Nieograniczoność
4. Punkty należące i nienależące do prostej
5. Wyznaczanie prostej przez dwa dane punkty
6. Punkty współliniowe i niewspółliniowe
7. Związki między prostą, półprostą i odcinkiem.

Przeprowadzone badania miały na celu rozpoznanie poziomu rozumienia przez uczniów szkoły podstawowej pojęcia prostej a także porównanie rozumienia tego pojęcia przez uczniów poszczególnych klas.

ANALIZA ROZWIĄZAŃ GRUP ZADAŃ ZE WZGLĘDU NA POSZCZEGÓLNE ASPEKTY ROZUMIENIA POJĘCIA PROSTEJ

1. Reprezentacja graficzna prostej.

Badaniu tej umiejętności poświęcono zadania 1, 3 i 8. Ich rozwiązanie wymagało:

- wyobrażenia sobie kształtu prostej
- odróżnienie prostej od innych figur przedstawionych na rysunkach
- graficznego reprezentowania prostej.

Uznaję, że uczeń umie:

- rozpoznać prostą, gdy trafnie wskaże rysunki, które ją przedstawiają oraz wskazać te rysunki, które przedstawiają inne figury
- przedstawić prostą graficznie, jeśli rysunek oddaje kształt prostej (może być odręczny, ale nie może być np. odcinkiem z zaznaczonymi na końcach punktami).

Wyniki nie różniły się znacząco między klasami IV –VIII. Oscylowały między 84% a 89%. Uczniowie nie mają zatem trudności z rozpoznawaniem prostej i potrafią ją przedstawić na rysunku. Najczęściej popełnianymi przez uczniów błędami było:

- wskazywanie łamanej, bądź linii „z odgałęzieniami” jako prostej

- pomijanie prostej z zaznaczonymi na niej punktami i kwalifikowanie jako rysunku nie przedstawiającego prostej
- przedstawianie odcinka jako prostej (zaznaczone końce).

Zatem uczniowie w większości znają kształt prostej i potrafią przedstawić ją na rysunku. Nieliczne błędy, jakie się pojawiają, prawdopodobnie wynikają z tego, że niektórzy uczniowie nie postrzegają rysunku jako całości, ale oddzielne jego elementy (np. łamana to wg nich dwie proste „stykające się” ze sobą). W rozwiązaniach tych zadań nie występują istotne różnice między poszczególnymi klasami. Jeśli jakieś zadanie sprawiało trudności, to zarówno czwarto- jak i ósmoklasistom. Doświadczenie zdobyte podczas lat nauki nie wpłynęło więc na umiejętność rozpoznawania czy też graficznego przedstawiania prostej.

2. Oznaczenia symboliczne prostej.

Zagadnienia oznaczania prostej dotyczyły zadania 3,8,9,10. Część z nich sformułowanych zostało w ten sposób, że treść polecenia sugerowała możliwość oznaczenia dwoma sposobami (małą literą bądź za pomocą dwóch należących do prostej punktów).

Rozwiązania wymagały:

- umiejętności oznaczania prostej pojedynczą małą literą lub dwoma należącymi do niej punktami
- dostrzeżenia, iż do poprawnego rozwiązania konieczne jest podanie obydwu sposobów oznaczania prostej.

Z analizy rozwiązań uczniowskich wynika, że:

- tylko między 40% a 52% uczniów poradziło sobie z zadaniami
 - uczniowie lepiej pamiętają oznaczenie prostej za pomocą małej litery
 - tylko około 20% uczniów oznacza prostą podając dwa należące do niej punkty
 - około połowa uczniów nie rozwiązuje do końca zadań
 - uczniowie rozwiązują zadania tylko jednym sposobem, nawet jeśli treść zadania sugeruje, że do poprawnego rozwiązania konieczne jest podanie obydwu sposobów oznaczania prostej.
- Porównując rozwiązania zadań przez poszczególne klasy nie zauważyłam znaczących różnic. Tylko zadanie 9, w którym trzeba było nazwać i oznaczyć figury znajdujące się na rysunku, lepiej rozwiązywali uczniowie klas ósmych.

3. Nieograniczoność prostej.

Rozumienie tej cechy badane było poprzez zadania 7, 11, 12, 13. Wśród zadań tej grupy znalazły się zadania różnorodne.

W zadaniach 7 i 12 uczniowie mieli rozstrzygnąć, czy dane odcinki i półproste zawierają się w zaznaczonych prostych.

W zadaniu 11 sprawdzane było kojarzenie dwóch faktów: nieograniczoność i niemożność zawarcia prostej w kole.

Treścią zadania 13 było rozstrzygnięcie, czy proste przecinają się.

Rozwiązanie zadań tej grupy wymagało:

- rozumienia pojęcia nieograniczoności
- traktowania prostej jako pojęcia abstrakcyjnego i oddzielenia go od jej graficznej reprezentacji

- wciągnięcia wniosku o niemożliwości zawarcia prostej w kole z nieograniczoności prostej.

Także w tej grupie zadań nie ma znaczących różnic w wynikach między poszczególnymi klasami. Wyniki mieszczą się w zakresie między 43% a 56%.

Po analizie rozwiązań zadań przez uczniów można wysnuć następujące wnioski:

- uczniowie znają własność nieograniczoności prostej tylko teoretycznie –jako wyuczoną regułę

- utożsamiają prostą z rysunkiem ją przedstawiającym. Wskazują na to słabe wyniki w zadaniu 13, w którym uczniowie jako proste przecinające się wskazują te proste, które przecinają się na rysunku. Tylko około połowa uczniów przedłużała proste tak, aby się przecinały i stwierdzała, że są to proste przecinające się.

- uczniowie słabo radzą sobie z wnioskowaniem. Poniżej 10% uczniów najmłodszych i około 30% najstarszych stwierdziło, że prostej nie można zamknąć w kole, ponieważ jest nieograniczona.

- dużą rolę odgrywa sugestia. W przykładzie d) zadania 11 była na rysunku prosta i zdanie: „Nie mogę narysować koła, w którym prosta się zawiera”. Przypuszczalnie fakt, że na rysunku nie było koła spowodował taką odpowiedź, pomimo, że uczniowie ci w zadaniu 11 a) wykreślili koło, w którym ich zdaniem zawierała się prosta.

Klasy VII i VIII rozwiązywały te zadania nieco lepiej niż uczniowie klas młodszych. Doświadczenie więc wyniesione z nauki w kolejnych latach wpłynęło na lepsze zrozumienie zagadnienia związanego z nieograniczonością prostej.

4. Punkty należące i nienależące do prostej.

Treścią zadania 6 było rozstrzygnięcie, które z podanych punktów należą do danych prostych. Poprawne rozwiązanie wymagało:

- rozumienie sformułowania „punkt należy do prostej”
- umiejętności wykorzystania własności nieograniczoności.

Uczniowie w ogromnej większości –ponad 80 % poprawnie wskazali punkty należące do prostej w podpunkcie a), natomiast w podpunktach b) i c) odsetek ten wynosił tylko około 30-40 %. Na tej podstawie należy stwierdzić, że:

- uczniowie znają określenie punktu należącego do prostej, ale
- mniej niż połowa uczniów wykorzystuje własność nieograniczoności prostej.

Tylko część uczniów przedłużała proste i dopiero na tej podstawie rozstrzygała, czy punkty do nich należą. Większość uczniów traktowała punkty leżące na „przedłużeniu” prostej, jako nie należące do danej prostej. Wynika to znowu z utożsamiania prostej z jej graficznym przedstawieniem.

W rozwiązaniach zadania 6 przez poszczególne klasy nie zaobserwowałam większych różnic. Uczniowie wszystkich klas rozwiązywały je na podobnym poziomie, popełniając te same błędy.

5. Wyznaczanie prostej przez dwa punkty.

Treścią zadań 2 i 13 było graficzne przedstawienie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty. Wykonanie poleceń wymagało:

- umiejętności przedstawiania prostej przechodzącej przez dwa punkty
- wykorzystania własności, iż dwa punkty wyznaczają prostą
- znajomości twierdzenia o jednoznaczności wyznaczania prostej przez dwa punkty.

Z analizy rozwiązań zadań uczniowskich wynika, że:

- uczniowie prawidłowo (ok. 70 %) przedstawiają prostą przechodzącą przez dwa punkty
- około połowa uczniów nie pamięta twierdzenia „Przez dwa różne punkty przechodzi tylko jedna prosta”.

Najczęściej popełnianymi przez uczniów błędami było:

- przedstawianie prostej jako odcinka o końcach w podanych punktach
- zaznaczanie dwóch innych punktów i kreślenie przez nie prostej w drugiej części zadania 2: „Czy możesz narysować inną prostą przechodzącą przez te dwa punkty?”

- część uczniów zamiast zapisać treść twierdzenia jako odpowiedź, pisało „nie da się”.
- uczniowie nie zauważali, że dane punkty w zadaniu 13 f) wyznaczają prostą, mimo, że treść zadania precyzowała, że rysunki przedstawiają proste.

Z graficznym przedstawieniem prostej uczniowie klas IV –VIII poradzi sobie w podobnym stopniu (około 80%). Drugą część zadania, z podaniem twierdzenia o jednoznaczności wyznaczania prostej przez dwa punkty najlepiej rozwiązywali uczniowie klasy VIII (ponad 60%), a pozostali uczniowie –na poziomie około 40%. Wynika to prawdopodobnie z lepszego rozumienia przez starszych uczniów roli twierdzenia w matematyce.

6. Punkty współliniowe i niewspółliniowe.

Treścią zadania 4 było przedstawienie trzech współliniowych punktów i wyznaczenie przechodzącej przez nie prostej. W zadaniu 5 uczniowie mieli określić liczbę prostych przechodzących jednocześnie przez trzy dowolne punkty. Aby rozwiązać zadania, uczeń powinien:

- rozumieć, że nie przez każde trzy punkty można poprowadzić prostą

Zadanie 4, które wymagało zaznaczenia 3 punktów w taki sposób, aby wyznaczały prostą, rozwiązało poprawnie około 60% uczniów. Natomiast zadanie 5 rozwiązało tylko kilkoro uczniów. Prawdopodobnie decydującą rolę odgrywała sugestia. Uczniowie po poprawnym rozwiązaniu zadania 4, stwierdzali w zadaniu 5, że przez trzy dowolne punkty zawsze można poprowadzić prostą. Ci natomiast, którzy w zadaniu 4 zaznaczyli punkty niewspółliniowe i przez każde dwa z nich poprowadzili proste, w zadaniu 5 odpowiadali, że przez 3 punkty przechodzą 3 proste –mimo, że nie było takiej odpowiedzi do wyboru (uczniowie dopisywali ją sami).

7. Prosta, półprosta, odcinek.

W zadaniach 7 i 12 uczniowie mieli rozstrzygnąć, czy dane odcinki i półproste zawierają się w prostych. Polecenie w zadaniu 9 wymagało nazwania i oznaczenia znajdujących się na rysunku figur.

Do poprawnego rozwiązania konieczne było:

- znajomość pojęć prostej, półprostej i odcinka,
- dostrzeganie różnic między tymi figurami
- odróżnianie reprezentacji graficznej od pojęcia prostej i półprostej
- znajomość symbolicznego sposobu oznaczania figur.

Po analizie rozwiązań zadań przez uczniów można stwierdzić, że:

- uczniowie znają kształt prostej, półprostej i odcinka
- dostrzegają różnice między tymi figurami
- nie zawsze łączą własność nieograniczoności prostej z należeniem do niej półprostej i odcinka
- znają sposoby oznaczania prostej i odcinka, nie pamiętają natomiast sposobu oznaczania półprostej.

Najczęściej popełnianym przez uczniów błędem było utożsamianie prostej z jej reprezentacją graficzną i brak wykorzystania własności nieograniczoności. Stąd wynikają błędy polegające na klasyfikowaniu półprostych i odcinków „dłuższych” na rysunku od prostej, jako do niej nie należących. Tylko około połowa uczniów na rysunku z zadania 9 znalazła proste, jeszcze mniej –półproste. Zadania 7 i 12 lepiej rozwiązywały klasy starsze –VII i VIII. Zauważalny jest więc wpływ doświadczenia nabywanego w kolejnych klasach.

ROZUMIENIE POJĘCIA PROSTEJ PRZEZ UCZNIÓW KLAS V-VIII

Po przeanalizowaniu prac uczniów wykorzystanych w badaniach, sformułować można kilka wniosków dotyczących poziomu rozumienia przez uczniów pojęcia prostej.

Prawie wszyscy uczniowie mają ukształtowane pojęcie prostej na poziomie wzrokowym. Umieją rozpoznać prostą na rysunku, wskazać modele, które ją przedstawiają oraz przedstawić graficznie.

Większość uczniów rozumie prostą na poziomie opisowym. Znają kształt prostej, jej własności i związki z innymi figurami. Potrafią symbolicznie oznaczyć prostą i posługiwać się oznaczeniami w różnych sytuacjach.

Niewielu uczniów osiągnęło poziom logiczny rozumienia prostej. Uczniowie ci potrafią posługiwać się własnościami prostej w różnych zadaniach. Widoczne to było zwłaszcza przy własności nieograniczoności prostej –potrafili ją powiązać z niemożliwością zawarcia prostej w kole. U niewielkiej części uczniów zaobserwowałam niezbyt często spotykane w szkole podstawowej stosowanie uproszczeń (w charakterze figury i linii nie przedstawiającej prostej wystarczy wziąć odcinek). Niewielu uczniów cytuje też własności lub twierdzenia w odpowiedzi do zadań, jeśli treść wprost tego nie wymaga.

WNIOSKI

Po przeprowadzeniu sprawdzianów i analizie wyników, pierwszym wnioskiem, jaki się nasuwa jest ten, że rozumienie pojęcia prostej przez uczniów między klasą IV a VIII nie różni się znacznie. A więc już w klasie IV czy V podczas realizowania programu z geometrii wytwarza się u uczniów określony poziom rozumienia tego pojęcia i ulega tylko niewielkiemu poszerzeniu w klasach następnych. W związku z tym już na początku wprowadzania nowych zagadnień z geometrii, konieczne jest wprowadzanie ich wielopoziomowo. Nieodzwonne jest stwarzanie różnorodnych sytuacji, z jakimi spotykają się uczniowie przy omawianiu wiadomości dotyczących prostej. Uczniowie powinni mieć także możliwość rozwiązywania różnorodnych zadań. Nie tylko typowych, na wykorzystanie teorii, ale zadań –problemów, takich, które wymagają wyciągania wniosków i szerokiej, samodzielnej aktywności. Bardzo ważne jest także, aby uczniowie spotykając się z pojęciem prostej na innych przedmiotach, traktowali tak samo jak na lekcjach matematyki. Nie można więc używać pojęcia „prosta” mając na myśli odcinek. Nie mogą pojawiać się sformułowania „linia prosta o długości...”

Wiadomości przekazywane uczniom na różnych przedmiotach muszą być zbieżne.