

PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY

W ROKU SZKOLNYM 2021-2022



MATEMATYKA

POZIOM PODSTAWOWY

ZASADY OCENIANIA ZADAŃ

KIELCE – MARZEC 2022

Klucz odpowiedzi do zadań zamkniętych

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
C	A	D	B	C	A	D	A	B	C	D	A	A	D
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
B	D	A	B	A	B	B	D	A	C	D	C	A	D

Schemat oceniania zadań otwartych**Zadanie 29. (0-2)**

Rozwiąż nierówność $2 - (x - 3)(x + 2) \geq -4$.

Przykładowe rozwiązanie

Rozwiązanie nierówności kwadratowej składa się z dwóch etapów. Pierwszy polega na ustaleniu pierwiastków trójmianu kwadratowego. Drugi etap polega na ustaleniu zbioru rozwiązań nierówności.

Realizacja pierwszego etapu:

Zapisujemy nierówność w postaci równoważnej $-x^2 + x + 12 \geq 0$ oraz znajdujemy pierwiastki trójmianu kwadratowego $-x^2 + x + 12$

- obliczamy wyróżnik trójmianu kwadratowego

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 12 = 49$$

$$x_1 = \frac{-1-7}{-2}, \quad x_2 = \frac{-1+7}{-2}$$

$$x_1 = 4, \quad x_2 = -3,$$

albo

- stosujemy wzory Viète'a:

$$x_1 + x_2 = 1, \quad x_1 x_2 = -12, \quad \text{więc } x_1 = 4 \text{ oraz } x_2 = -3,$$

albo

- podajemy je bezpośrednio, np. zapisując pierwiastki trójmianu $x_1 = 4, \quad x_2 = -3$, lub zaznaczając je na wykresie.

Realizacja drugiego etapu:

Podajemy zbiór rozwiązań nierówności $x \in \langle -3; 4 \rangle$.

Schemat oceniania**Zdający otrzymuje1p.**

gdy

- obliczy lub poda pierwiastki trójmianu kwadratowego: $x_1 = -3$, $x_2 = 4$ i na tym zakończy lub błędnie poda zbiór rozwiązań nierówności,
- albo
- popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu wyróżnika lub pierwiastków trójmianu kwadratowego (ale otrzyma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność.

Zdający otrzymuje2p.

gdy

- poda zbiór rozwiązań nierówności:
 $x \in < -3 ; 4 >$ lub $(x \leq 4 \text{ i } x \geq -3)$,
- albo
- poda zbiór rozwiązań w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów.

**Zadanie 30. (0-2)**Rozwiąż równanie $-5(2x^2 - 18)(x^2 + 32) = 0$.**Przykładowe rozwiązanie**

$$-5(2x^2 - 18)(x^2 + 32) = 0$$

$$2x^2 - 18 = 0 \text{ lub } x^2 + 32 = 0$$

$$x^2 = 9 \text{ lub } x^2 = -32$$

drugie równanie nie ma rozwiązań, więc

$$x = -3 \text{ lub } x = 3$$

Schemat oceniania**Zdający otrzymuje1p.**

gdy

- zapisze dwa równania $2x^2 - 18 = 0$ i $x^2 + 32 = 0$ lub z zapisu wynika, że rozwiązuje te równania
- albo
- obliczy lub poda rozwiązanie równania $2x^2 - 18 = 0$ ($x = -3$, $x = 3$) oraz błędnie rozwiąże równanie $x^2 + 32 = 0$

albo

- zapisze, że równanie $x^2 + 32 = 0$ nie ma rozwiązań i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje2p.

gdy wyznaczy wszystkie rozwiązania równania: $x = -3$, $x = 3$, ale nie uzyska ich w wyniku błędnej metody.

Uwaga

Jeżeli zdający poda wszystkie rozwiązania $x = -3$, $x = 3$ bez zapisanych rachunków lub uzasadnienia, to otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 31. (0-2)

Uzasadnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b spełniona jest nierówność

$$a^2 + 2b^2 > 2ab - 1.$$

Przykładowe rozwiązania

I sposób rozwiązania

Nierówność możemy przekształcić równoważnie

$$\begin{aligned} a^2 + 2b^2 - 2ab &> -1 \\ (a^2 - 2ab + b^2) + b^2 &> -1 \\ (a - b)^2 + b^2 &> -1 \end{aligned}$$

Lewa strona tej nierówności jest sumą dwóch liczb nieujemnych: $(a - b)^2$ oraz b^2 , czyli jest nieujemna dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b , więc jest również większa od liczby ujemnej -1 .

To kończy dowód.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje1p.

gdy zapisze nierówność w postaci

$$(a^2 - 2ab + b^2) + b^2 > -1$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje2p.

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Uwagi

1. Jeżeli zdający sprawdza poprawność nierówności dla wybranych wartości a oraz b , to otrzymuje **0 punktów**.

2. Jeżeli zdający doprowadzi nierówność do postaci $(a - b)^2 + b^2 > -1$, ale poda niepoprawne uzasadnienie prawdziwości tej nierówności, to otrzymuje **1 punkt**.

II sposób rozwiązania

Nierówność możemy przekształcić równoważnie

$$a^2 + 2b^2 - 2ab + 1 > 0$$

Uzasadnimy, że lewa strona tej nierówności jest liczbą dodatnią dla dowolnych liczb a i b .

$$a^2 - 2ab + 2b^2 + 1 > 0$$

Potraktujmy tę nierówność jako zwykłą nierówność kwadratową z niewiadomą a .

Wyznamy wyróżnik trójmianu $\Delta_b = (-2b)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2b^2 + 1)$

$$\Delta_b = 4b^2 - 8b^2 - 4$$

$$\Delta_b = -4b^2 - 4$$

$\Delta_b < 0$ dla dowolnych $b \in R$, więc nierówność $a^2 - 2ab + 2b^2 + 1 > 0$ jest spełniona przez wszystkie liczby rzeczywiste a i b .

To kończy dowód.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje1p.

- gdy doprowadzi nierówność do postaci $a^2 - 2ab + 2b^2 + 1 > 0$ i prawidłowo wyznaczy wyróżnik trójmianu kwadratowego $\Delta_b = -4b^2 - 4$,

albo

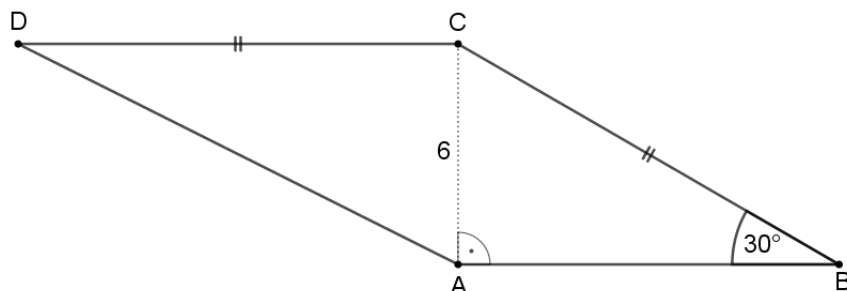
- gdy doprowadzi nierówność do postaci $2b^2 - 2ab + a^2 + 1 > 0$ i prawidłowo wyznaczy wyróżnik trójmianu kwadratowego $\Delta_a = -4a^2 - 8$.

Zdający otrzymuje2p.

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Zadanie 32. (0-2)

Przekątna AC o długości 6 jest wysokością trapezu $ABCD$. Miara kąta ABC jest równa 30° . Bok BC oraz podstawa CD mają równe długości (zobacz rysunek).



Oblicz długość boku AD .

Przykładowe rozwiązanie

Obliczamy długość odcinka BC .

$$\sin 30^\circ = \frac{|AC|}{|BC|}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{6}{|BC|}$$

$$|BC| = 12, \text{ zatem } |DC| = 12$$

Obliczamy długość odcinka AD korzystając z twierdzenia Pitagorasa.

$$|AC|^2 + |CD|^2 = |AD|^2$$

$$6^2 + 12^2 = |AD|^2$$

$$|AD| = \sqrt{180}$$

$$|AD| = 6\sqrt{5}$$

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje1p.

gdy

- wyznaczy długość boku $|BC| = 12$

albo

- popętni błąd przy obliczaniu długości odcinka BC i konsekwentnie do swoich obliczeń wyznaczy długość boku AD

Zdający otrzymuje2p.

gdy wyznaczy $|AD| = \sqrt{180}$.

Zadanie 33. (0-2)

Liczby x , $x^2 + 1$, $8x - 2$ w podanej kolejności są pierwszym, drugim i piątym wyrazem ciągu arytmetycznego. Oblicz x .

Przykładowe rozwiązanie

Wprowadźmy oznaczenia: $a_1 = x$, $a_2 = x^2 + 1$, $a_5 = 8x - 2$

W ciągu arytmetycznym $\frac{a_5 - a_2}{3} = r$ oraz $a_2 - a_1 = r$, więc

$$a_2 - a_1 = \frac{a_5 - a_2}{3}$$

$$x^2 + 1 - x = \frac{8x - 2 - x^2 - 1}{3}$$

$$3x^2 + 3 - 3x = -x^2 + 8x - 3$$

$$4x^2 - 11x + 6 = 0$$

$$\Delta = (-11)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-3)$$

$$\Delta = (-11)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 6$$

$$\Delta = 25$$

$$x_1 = \frac{11-5}{8}, \quad x_2 = \frac{11+5}{8}$$

$$x_1 = \frac{3}{4}, \quad x_2 = 2$$

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje.....1p.

gdy zapisze warunek , np.:

$$x^2 + 1 - x = \frac{8x - 2 - x^2 - 1}{3} \quad \text{lub} \quad a_2 - a_1 = \frac{a_5 - a_2}{3} \quad \text{lub} \quad (a_5 - a_2 = 3r \quad \text{i} \quad a_2 - a_1 = r)$$

Zdający otrzymuje.....2p.

gdy obliczy: $x_1 = \frac{3}{4}$, $x_2 = 2$

Zadanie 34. (0-2)

Punkt $W = (-2, 4)$ jest wierzchołkiem paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = -2x^2 + bx + c$. Wyznacz wartości współczynników b oraz c .

Przykładowe rozwiązania**I sposób rozwiązania**

Skoro punkt $W = (-2, 4)$ jest wierzchołkiem paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = -2x^2 + bx + c$, więc wzór tej funkcji możemy zapisać w postaci kanonicznej:

$$f(x) = -2(x + 2)^2 + 4$$

Przekształćmy wzór funkcji f do postaci ogólnej.

$$f(x) = -2(x^2 + 4x + 4) + 4$$

$$f(x) = -2x^2 - 8x - 8 + 4$$

$$f(x) = -2x^2 - 8x - 4$$

Ostatecznie: $b = -8$, $c = -4$.

II sposób rozwiązania

Skoro punkt $W = (-2, 4)$ jest wierzchołkiem paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = -2x^2 + bx + c$, możemy zapisać następujące warunki

$$\begin{cases} \frac{-b}{2a} = -2 \\ \frac{-\Delta}{4a} = 4 \end{cases}$$

Skoro $a = -2$ otrzymujemy

$$\begin{cases} \frac{-b}{-4} = -2 \\ \frac{-\Delta}{-8} = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -8 \\ \Delta = 32 \end{cases}$$

$$\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot c$$

$$32 = 64 + 8c$$

$$8c = -32$$

$$c = -4$$

Ostatecznie: $b = -8$, $c = -4$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje1p.

gdy

- zapisze wzór funkcji w postaci kanonicznej $f(x) = -2(x + 2)^2 + 4$

albo

- zapisze układ warunków, z których można wyznaczyć brakujące współczynniki, np.:

$$\begin{cases} \frac{-b}{2a} = -2 \\ \frac{-\Delta}{4a} = 4 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} p = -2 \\ f(-2) = 4 \end{cases}$$

albo

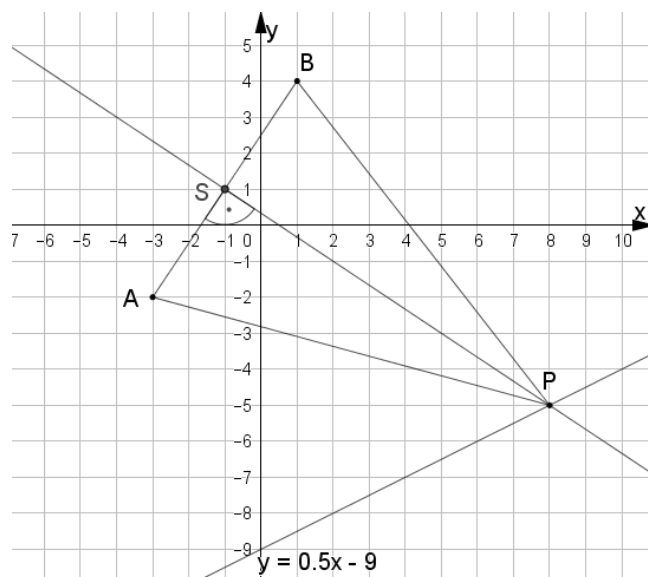
- wyznaczy wartość współczynnika $b = -8$.

Zdający otrzymuje2p.gdy wyznaczy $b = -8$, $c = -4$.**Zadanie 35. (0-5)**

Punkty $A = (-3, -2)$ oraz $B = (1, 4)$ są wierzchołkami trójkąta równoramiennego ABP , w którym $|AP| = |BP|$. Punkt P leży na prostej $y = \frac{1}{2}x - 9$. Wyznacz współrzędne punktu P oraz długość odcinka AP .

Przykładowe rozwiązania**I sposób**

Wykorzystamy fakt, że wysokość trójkąta równoramiennego zawiera się w symetralnej podstawy AB .



Wyznaczamy współrzędne środka odcinka AB .

$$S = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

$$S = \left(\frac{-3 + 1}{2}, \frac{-2 + 4}{2} \right)$$

$$S = (-1, 1)$$

Wyznaczamy współczynnik kierunkowy prostej AB .

$$a_{AB} = \frac{4 - (-2)}{1 - (-3)} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Wyznaczamy równanie symetralnej odcinka AB .

$$y = -\frac{2}{3}x + b$$

$$1 = -\frac{2}{3} \cdot (-1) + b$$

$$b = \frac{1}{3}$$

Równanie symetralnej odcinka AB : $y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

Wyznaczamy współrzędne punktu P rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x - 9 \\ y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x - 9 \\ \frac{1}{2}x - 9 = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x - 9 \\ 3x - 54 = -4x + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x - 9 \\ 7x = 56 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 8 \\ y = -5 \end{cases}$$

zatem $P = (8, -5)$.

Obliczamy długość odcinka AP .

$$|AP| = \sqrt{(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2}$$

$$|AP| = \sqrt{(8 - (-3))^2 + (-5 - (-2))^2}$$

$$|AP| = \sqrt{11^2 + (-3)^2}$$

$$|AP| = \sqrt{130}$$

II sposób

Wykorzystamy fakt, że ramiona trójkąta równoramiennego mają tę samą długość.

Punkt P leży na prostej $y = \frac{1}{2}x - 9$, więc istnieje taka liczba rzeczywista a , dla której

$$P = (a, \frac{1}{2}a - 9)$$

$$|PA| = |PB|$$

$$\sqrt{(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2} = \sqrt{(x_P - x_B)^2 + (y_P - y_B)^2}$$

$$\sqrt{(a+3)^2 + \left(\frac{1}{2}a - 9 + 2\right)^2} = \sqrt{(a-1)^2 + \left(\frac{1}{2}a - 9 - 4\right)^2}$$

$$(a+3)^2 + \left(\frac{1}{2}a - 7\right)^2 = (a-1)^2 + \left(\frac{1}{2}a - 13\right)^2$$

$$a^2 + 6a + 9 + \frac{1}{4}a^2 - 7a + 49 = a^2 - 2a + 1 + \frac{1}{4}a^2 - 13a + 169$$

$$14a = 112$$

$$a = 8$$

$$P = \left(a, \frac{1}{2}a - 9\right) = \left(8, \frac{1}{2} \cdot 8 - 9\right) = (8, -5)$$

Obliczamy długość odcinka AP .

$$|AP| = \sqrt{(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2}$$

$$|AP| = \sqrt{(8 - (-3))^2 + (-5 - (-2))^2}$$

$$|AP| = \sqrt{11^2 + (-3)^2}$$

$$|AP| = \sqrt{130}$$

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje1p.

gdy:

- obliczy współrzędne przecięcia się przekątnych $S = (-1, 1)$

albo

- wyznaczy współczynnik kierunkowy prostej AB : $a_{AB} = \frac{3}{2}$

albo

- zapisze punkt w postaci np.: $P = (a, \frac{1}{2}a - 9)$

albo

- zapisze równość $|PA| = |PB|$.

Zdający otrzymuje2p.

gdy:

- wyznaczy równanie symetralnej $y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

albo

- zapisze, że $P = (a, \frac{1}{2}a - 9)$ oraz $\sqrt{(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2} = \sqrt{(x_P - x_B)^2 + (y_P - y_B)^2}$

Zdający otrzymuje3p.

gdy:

- zapisze układ równań
$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x - 9 \\ y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \end{cases}$$

albo

- zapisze równanie $\sqrt{(a+3)^2 + \left(\frac{1}{2}a - 9 + 2\right)^2} = \sqrt{(a-1)^2 + \left(\frac{1}{2}a - 9 - 4\right)^2}$

•

Zdający otrzymuje4p.

gdy wyznaczy współrzędne punktu $P = (8, -5)$.

Zdający otrzymuje5p.

gdy wyznaczy współrzędne punktu $P = (8, -5)$ oraz długość odcinka $|AP| = \sqrt{130}$