Klasa …………

Nazwisko i imię ………...…………………………

MARZEC
ROK 2019

PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

POZIOM ROZSZERZONY

Czas pracy 180 minut

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 16 stron (zadania 1–15).
   Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
3. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego (6–15) może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
4. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
5. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
6. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
7. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora prostego.

Życzymy powodzenia!

Za rozwiązanie wszystkich zadań można otrzymać łącznie
50 punktów

Odpowiedzi znajdziesz na www.sodmidn.kielce.eu

ZADANIA ZAMKNIĘTE
W zadaniach od 1. do 4. wybierz i zaznacz poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (0-1)

Liczba $\log_2 5 \cdot \log_5 3 \cdot \log_3 \frac{1}{4}$ jest równa

A. 4 **B.** $-\frac{1}{2}$ **C.** 2 **D.** -2

Zadanie 2. (0-1)

Granica $\lim\limits_{x \to 2} \frac{2x-4}{-x^2+3x-2}$ jest równa

A. $-\infty$ **B.** -2 **C.** $+\infty$ **D.** 2

Zadanie 3. (0-1)

Obrazem punktu $A = (3, -5)$ w jednokładności o środku $O = (6,\ 1)$ i skali $\boldsymbol{k}$ jest punkt $B = (8,\ 5)$. Skala $\boldsymbol{k}$ tej jednokładności jest równa

A. $-\frac{2}{3}$ **B.** -2 **C.** $\frac{2}{3}$ **D.** $-\frac{1}{4}$

Zadanie 4. (0-1)

Liczba $\sqrt{9-4\sqrt{5}} - \sqrt{29-12\sqrt{5}}$ jest równa

A. $\sqrt{-20+8\sqrt{5}}$ **B.** $-1+\sqrt{5}$ **C.** $1-\sqrt{5}$ **D.** $-1-3\sqrt{5}$

Zadanie 5. (0-2)

Wyznacz $\frac{a}{b}$, gdzie a i b $(a < b)$ są liczbami naturalnymi dodatnimi należącymi do zbioru rozwiązań nierówności $x < \frac{-2x-1}{x-4}$. W poniższe kratki wpisz kolejno cyfrę jedności i pierwsze dwie cyfry po przecinku nieskończonego rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

BRUDNOPIS (nie podlega ocenie)

Zadanie 6. (0-3)

Rozwiąż równanie $sin^3x - 4cos^2x - \frac{1}{4}sinx + 3 = 0$ w przedziale $(0,\ 2\pi)$.

Odpowiedź: ……………………………………………………………………………

Zadanie 7. (0-3)

Wykaż, że wyrażenie $x^4 - 7x^2 + 4x + 25$ osiąga najmniejszą wartość dla $x = -2$.

Odpowiedź: ……………………………………………………………………………………

Zadanie 8. (0-3)

Punkty A, B, C, D są kolejnymi wierzchołkami czworokąta wpisanego w okrąg, w którym $|AB| + |AD| = |CD| + |CB|$. Miara kąta BAD jest równa α. Uzasadnij, że

$$\frac{|AB| \cdot |AD|}{|CD| \cdot |CB|} = \frac{1 - cos\alpha}{1 + cos\alpha}$$

BRUDNOPIS (nie podlega ocenie)

Zadanie 9. (0-3)

W wyścigu kolarskim udział bierze 24 zawodników (sześć 4-osobowych drużyn). Każdy z uczestników wyścigu ma tę samą szansę wygrania. Jakie jest prawdopodobieństwo, że zawodnicy z jednego zespołu uplasują się na trzech pierwszych miejscach?

Odpowiedź: ……………………………………………………………………………………

Zadanie 10. (0-5)

Dla jakich wartości parametru m funkcja $f(x) = x^2 + (3m - 4)x + m^2 - 3m + 3$ ma dwa różne miejsca zerowe należące do przedziału $(1;\ 3)$?

Odpowiedź: ……………………………………………………………………………………

Zadanie 11. (0-5)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie

$$|1-2x|-|x+3|=-\frac{1}{2}m^2$$

ma dwa różne dodatnie rozwiązania.

Odpowiedź: ……………………………………………………………………………………

Zadanie 12. (0-5)

Punkty $A = (3, 9)$, $B = (-5, 3)$ oraz $C = \left(2, -6\frac{1}{3}\right)$ są kolejnymi wierzchołkami czworokąta $ABCD$ opisanego na okręgu o środku w punkcie $S = (2, 2)$. Wyznacz współrzędne punktu D.

Odpowiedź: ....

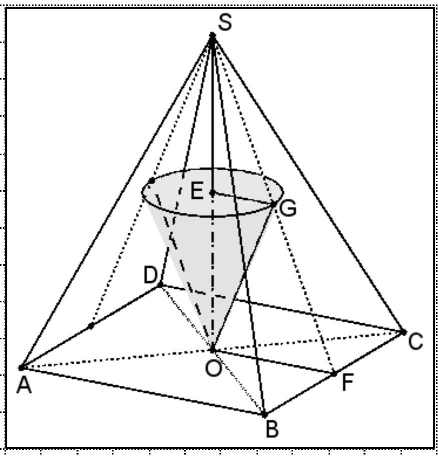
Zadanie 13. (0-5)

Liczby $x,\ y,\ z,$ w podanej kolejności są trzema początkowymi wyrazami malejącego ciągu geometrycznego (a_n). Suma tych liczb jest równa $3\frac{1}{2}$. Jeżeli od trzeciej z tych liczb odejmiemy $\frac{1}{2}$, to otrzymamy trzy kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego. Wyznacz $x,\ y,\ z$ oraz wszystkie wartości n, dla których $a_n \geq \frac{1}{S}$, gdzie S jest sumą wyrazów nieskończonego ciągu (a_n).

Odpowiedź: ……………………………………………………………………………………

Zadanie 14. (0-6)

W ostrosłup prawidłowy czworokątny $ABCDS$, w którym krawędź podstawy ma długość 10, a krawędź boczna $\sqrt{194}$, wpisano stożek. Wierzchołek stożka znajduje się w punkcie przecięcia przekątnych podstawy ostrosłupa, a jego podstawa równoległa do płaszczyzny podstawy ostrosłupa jest styczna do wszystkich ścian bocznych ostrosłupa (rysunek poniżej). Wyznacz wysokość stożka, jeżeli stosunek objętości stożka do objętości ostrosłupa jest równy $\frac{\pi}{32}$.



Odpowiedź: ……………………………………………………………………………………

Zadanie 15. (0-6)

Dany jest graniastosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy 6 i wysokości 18. Wysokość tego graniastosłupa zmniejszono o x $(x > 0)$, a wszystkie krawędzie podstaw zwiększono o $\frac{1}{2}$x**.** Oblicz pole powierzchni całkowitej graniastosłupa, którego objętość jest największa.

Odpowiedź: ……………………………………………………………………………………

BRUDNOPIS