# PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY

W ROKU SZKOLNYM 2019-2020

# MATEMATYKA

POZIOM PODSTAWOWY

# ZASADY OCENIANIA ZADAŃ

KIELCE – MARZEC 2020

## Klucz odpowiedzi do zadań zamkniętych

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **C** | **D** | **A** | **C** | **B** | **D** | **B** | **C** | **B** | **D** | **A** | **D** | **D** | **A** | **A** | **B** | **D** | **A** | **C** | **C** | **D** | **A** | **B** | **B** | **A** |

## Schemat oceniania zadań otwartych

### Zadanie 26. (0-2)

Rozwiąż nierówność $-x^2 + 2x \leq (x-2)(x-1)$.

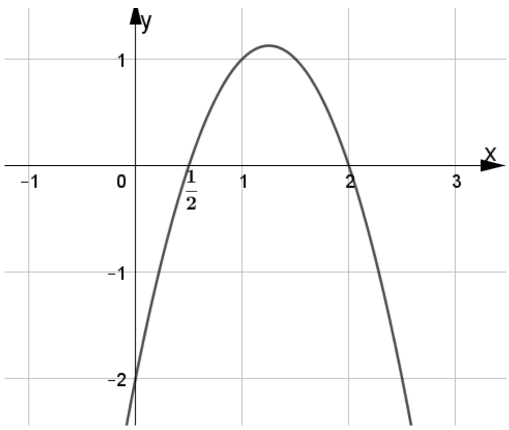
**Przykładowe rozwiązanie**

$$-x^2 + 2x \leq (x-2)(x-1)$$
$$-x^2 + 2x \leq x^2 - x - 2x + 2$$
$$-2x^2 + 5x - 2 \leq 0$$

Obliczamy pierwiastki trójmianu kwadratowego $-2x^2 + 5x - 2$.

$$\Delta = 5^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-2) = 9$$
$$x_1 = \frac{-5-3}{-4},\ x_2 = \frac{-5+3}{-4}$$
$$x_1 = 2,\ x_2 = \frac{1}{2}$$

Szkicujemy wykres trójmianu kwadratowego $y = -2x^2 + 5x - 2$,




z którego odczytujemy zbiór rozwiązań nierówności

$$x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right\rangle \cup \langle 2; +\infty)$$

**Schemat oceniania**

**Zdający otrzymuje ........................................................................................................................1p.**

gdy

- obliczy lub poda pierwiastki trójmianu kwadratowego: $x_1 = 2,\ x_2 = \frac{1}{2}$ i na tym zakończy lub błędnie poda zbiór rozwiązań nierówności,

albo

- popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu wyróżnika lub pierwiastków trójmianu kwadratowego (ale otrzyma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność.

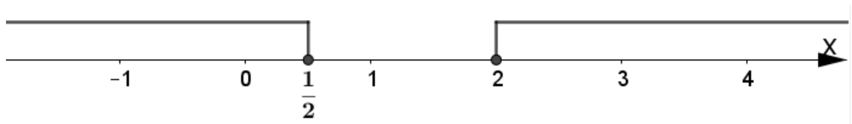
**Zdający otrzymuje ........................................................................................................................2p.**

gdy

- poda zbiór rozwiązań nierówności: $x \in \left(-\infty;\ \frac{1}{2}\right\rangle \cup \langle 2; +\infty)$ lub $(x \le \frac{1}{2}\ lub\ x \ge 2)$,

albo

- poda zbiór rozwiązań w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów.




## Zadanie 27. (0-2)

Rozwiąż równanie $\frac{x^2+3x-4}{2x-2} = -3$.

**Przykładowe rozwiązanie**

Założenie: $2x - 2 \neq 0$, zatem $x \neq 1$.

$$\frac{x^2 + 3x - 4}{2x - 2} = -3$$

$$x^2 + 3x - 4 = -6x + 6$$

$$x^2 + 9x - 10 = 0$$

$$\Delta = 9^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) = 121,\ \sqrt{\Delta} = 11,$$

$$x_1 = \frac{-9-11}{2} = -10,$$

$$x_2 = \frac{-9+11}{2} = 1 \text{ – nie spełnia założenia}$$

Rozwiązanie: $x = -10$.

**Schemat oceniania**

**Zdający otrzymuje ......................................................................................................................1p.**

gdy

- zapisze założenie $x \neq 1$

albo
- zapisze równanie w postaci $x^2 + 9x - 10 = 0$

albo
- zapisze równanie w postaci $\frac{(x-1)(x+4)}{2(x-1)} = -3$

i na tym zakończy, lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje ......................................................................................................................2p.**

gdy wyznaczy rozwiązanie $x = -10$.

**Uwagi**

1. Jeżeli zdający nie zapisze założenia i otrzyma dwa rozwiązania $x = 1$, $x = -10$, ale sprawdzi, że $x = 1$ nie spełnia równania, to otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający poprawnie wyznaczy rozwiązanie równania, ale poda niewłaściwą odpowiedź, np. $x \epsilon R - \{-10\}$, to otrzymuje **1 punkt**.

**Zadanie 28. (0-2)**

Uzasadnij, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych $x$ i $y$ spełniona jest nierówność

$$\frac{2x^2+2y^2+1}{x+y} \geq 2\ .$$

**Przykładowe rozwiązania**

Nierówność możemy przekształcić równoważnie

$$\frac{2x^2 + 2y^2 + 1}{x + y} \geq 2$$

$$2x^2 + 2y^2 + 1 \geq 2x + 2y$$

$$2x^2 - 2x + 2y^2 - 2y + 1 \geq 0$$

**I sposób rozwiązania**

$$4x^2 - 4x + 4y^2 - 4y + 2 \geq 0$$

$$(4x^2 - 4x + 1) + (4y^2 - 4y + 1) \geq 0$$

$$(2x - 1)^2 + (2y - 1)^2 \geq 0$$

albo

$$2x^2 - 2x + 2y^2 - 2y + 1 \geq 0$$

$$\left(2x^2 - 2x + \frac{1}{2}\right) + \left(2y^2 - 2y + \frac{1}{2}\right) \geq 0$$

$$\left(\sqrt{2}x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\sqrt{2}y-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \geq 0$$

Lewa strona tej nierówności jest sumą dwóch liczb nieujemnych, więc jest nieujemna dla dowolnych liczb rzeczywistych $x$ i $y$, więc w szczególności również dla liczb dodatnich.

**To kończy dowód.**

---

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..................................................................................................................1p.**

gdy zapisze nierówność w postaci

$$(4x^2-4x+1)+(4y^2-4y+1)\geq 0 \quad \text{lub} \quad \left(2x^2-2x+\tfrac{1}{2}\right)+\left(2y^2-2y+\tfrac{1}{2}\right)\geq 0$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje ..................................................................................................................2p.**

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

**Uwagi**

1. Jeżeli zdający sprawdza poprawność nierówności dla wybranych wartości $x$ oraz $y$, to otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający doprowadzi nierówność do postaci $(2x-1)^2+(2y-1)^2\geq 0$ lub $\left(\sqrt{2}x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\sqrt{2}y-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\geq 0$, ale poda niepoprawne uzasadnienie prawdziwości tej nierówności, (np. *„liczba ta jest zawsze dodatnia”*), to otrzymuje **1 punkt**.
3. Jeżeli zdający przeprowadzi poprawne rozumowanie, które zakończy zapisem $(2x-1)^2+(2y-1)^2\geq 0$ lub $\left(\sqrt{2}x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\sqrt{2}y-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\geq 0$, to otrzymuje **2 punkty**.

**II sposób rozwiązania**

Uzasadnimy, że lewa strona tej nierówności jest liczbą nieujemną dla dowolnych liczb $x$ i $y$.

$$2x^2-2x+2y^2-2y+1\geq 0$$

Potraktujmy tę nierówność jako zwykłą nierówność kwadratową z niewiadomą $x$.

Wyznaczmy wyróżnik trójmianu $\Delta_y=(-2)^2-4\cdot 2\cdot(2y^2-2y+1)$

$$\Delta_y=4-16y^2+16y-8$$

$$\Delta_y=-16y^2+16y-4$$

$$\Delta_y=-(4y-2)^2$$

$\Delta\leq 0$ dla dowolnych $y\in R$, więc nierówność $2x^2-2x+2y^2-2y+1\geq 0$ jest spełniona przez wszystkie liczby rzeczywiste $x$ i $y$, a zatem nierówność $\frac{2x^2+2y^2+1}{x+y}\geq 2$ jest spełniona przez wszystkie dodatnie liczby rzeczywiste $x$ i $y$.

**To kończy dowód.**

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ........................................................................................................................1p.**

- gdy doprowadzi nierówność do postaci $2x^2 - 2x + 2y^2 - 2y + 1 \geq 0$ i prawidłowo wyznaczy wyróżnik trójmianu kwadratowego $\Delta_y = -16y^2 + 16y - 4$,

albo

- gdy doprowadzi nierówność do postaci $2y^2 - 2y + 2x^2 - 2x + 1 \geq 0$ i prawidłowo wyznaczy wyróżnik trójmianu kwadratowego $\Delta_x = -16x^2 + 16x - 4$.

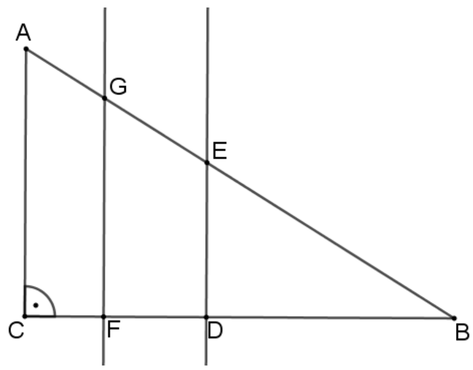
**Zdający otrzymuje ........................................................................................................................2p.**

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

**Zadanie 29. (0-2)**

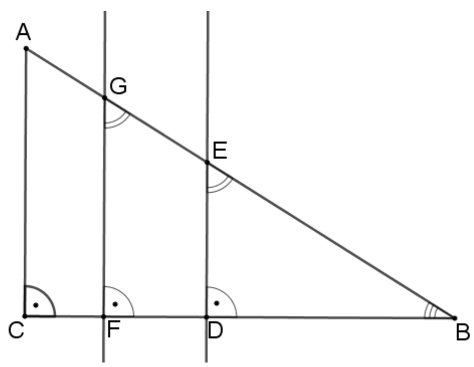
Dany jest trójkąt prostokątny ABC, w którym $|\measuredangle C| = 90^0$. Poprowadzono dwie proste równoległe do przyprostokątnej AC dzielące trójkąt $ABC$ na trzy figury o równych polach (zobacz rysunek).

Uzasadnij, że $\frac{|FG|}{|DE|} = \sqrt{2}$.




**Przykładowe rozwiązanie**

Zauważmy, że trójkąty $BFG$ oraz $BDE$ są podobne (cecha kąt, kąt, kąt).



Z treści zadania wynika, że $P_{BFG} = 2P_{BDE}$, więc $\frac{P_{BFG}}{P_{BDE}} = 2$.

Skala podobieństwa spełnia warunek: $k^2 = 2$, więc $k = \sqrt{2}$.

Skoro trójkąty $BFG$ oraz $BDE$ są podobne w skali $k = \sqrt{2}$, więc $\frac{|\mathrm{FG}|}{|\mathrm{DE}|} = \sqrt{2}$, co należało uzasadnić.

**Schemat oceniania**

**Zdający otrzymuje ...................................................................................................................1p.**

gdy zauważy, że trójkąty $BFG$ oraz $BDE$ są podobne oraz $P_{AFG} = 2P_{BDE}$.

**Zdający otrzymuje ...................................................................................................................2p.**

gdy przeprowadzi pełny dowód.

**Zadanie 30. (0-2)**

Dana jest funkcja $f(x) = -3x + 11$, której dziedziną jest zbiór $D_f = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Spośród wszystkich punktów należących do wykresu tej funkcji wybrano jeden. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania punktu, którego suma współrzędnych jest liczbą pierwszą.

**Przykładowe rozwiązanie**

Zbiór zdarzeń elementarny $\Omega$, to zbiór wszystkich punktów należących do wykresu funkcji $f$.

$$\Omega = \{(0,11), (1,8), (2,5), (3,2), (4,-1), (5,-4), (6,-7), (7,-10)\}$$

$$|\Omega| = 8$$

Oznaczmy przez $A$ zdarzenie polegające na wylosowaniu punktu, którego suma współrzędnych jest liczbą pierwszą.

**Przypomnienie**

Liczba pierwsza – liczba naturalna większa od 1, która ma dokładnie dwa dzielniki naturalne: jedynkę i siebie samą.

$$\mathrm{A} = \{(0,11), (2,5), (3,2), (4,-1)\}$$

$$|\mathrm{A}| = 4$$

Obliczamy prawdopodobieństwo korzystając z definicji klasycznej prawdopodobieństwa

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

$$P(A) = \frac{4}{8}$$

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

**Schemat oceniania**

**Zdający otrzymuje ........................................................................................................1p.**

- gdy zapisze liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych $|\Omega| = 8$ ,

albo

- gdy wypisze wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu $A$ ,

albo

- gdy zapisze liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu $A$, $|\mathrm{A}| = 4$,

**Zdający otrzymuje ........................................................................................................2p.**

gdy wyznaczy prawdopodobieństwo zdarzenia $P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

**Uwagi**

1. Jeżeli zdający poda prawdopodobieństwo zdarzenia $A$ większe od 1, to za całe zadanie otrzymuje **0p**.
2. Jeżeli zdający pominie jedno zdarzenie sprzyjające zdarzeniu $A$ i otrzyma $P(A) = \frac{3}{8}$,to otrzymuje za całe rozwiązanie **1p**.

**Zadanie 31. (0-2)**

Miary kolejnych kątów wewnętrznych czworokąta tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy $13^o$. Wyznacz miary kątów tego czworokąta.

**Przykładowe rozwiązania**

Oznaczmy kolejne miary kątów wewnętrznych rozpatrywanego czworokąta: $\alpha < \beta < \gamma < \delta$.

**I sposób rozwiązania**

Kolejne miary kątów czworokąta: $\alpha$, $\beta = \alpha + 13^0$, $\gamma = \alpha + 26^0$, $\delta = \alpha + 39^0$.

Suma kątów wewnętrznych czworokąta jest równa $360^o$, więc

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^0$$

$$\alpha + \alpha + 13^0 + \alpha + 26^0 + \alpha + 39^0 = 360^0$$

$$4\alpha + 78^0 = 360^0$$

$$4\alpha = 282^0$$

$$\alpha = 70{,}5^0$$

Ostatecznie: $\alpha = 70{,}5^o$, $\beta = 83{,}5^0$, $\gamma = 96{,}5^0$, $\delta = 109{,}5^0$.

**II sposób rozwiązania**

Wprowadźmy następujące oznaczenia: $a_1 = \alpha$, $r = 13^0$.

$$S_4 = 360^0$$

$$\frac{2a_1 + 3r}{2} \cdot 4 = 360^0$$

$$2\alpha + 39^0 = 180^0$$

$$2\alpha = 141^0$$

$$\alpha = 70{,}5^0$$

Ostatecznie: $\alpha = 70{,}5^o,\ \beta = 83{,}5^0,\ \gamma = 96{,}5^0,\ \delta = 109{,}5^0$.

**Schemat oceniania**

**Zdający otrzymuje ........................................................................................................1p.**

Zdający

- zapisze równanie np.

$$\alpha + \alpha + 13^0 + \alpha + 26^0 + \alpha + 39^0 = 360^0$$

albo

- zapisze układ warunków, z których można wyznaczyć miarę jednego z kątów wewnętrznych np.: .

$$a_1 = \alpha,\ r = 13^0, \frac{2a_1+3r}{2} \cdot 4 = 360^0.$$

**Zdający otrzymuje ........................................................................................................2p.**

gdy wyznaczy miary wszystkich kątów wewnętrznych: $70{,}5^o,\ 83{,}5^0,\ 96{,}5^0,\ 109{,}5^0$..

---

## Zadanie 32. (0-5)

Punkt $A = (-5, -8)$ należy do wykresu funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx - 3$, a zbiór $(-\infty;\ -2\rangle$ jest maksymalnym przedziałem, w którym funkcja ta jest rosnąca. Wyznacz wartości współczynników $a$ i $b$ oraz najmniejszą i największą wartość funkcji w przedziale $\langle -3, -\frac{1}{2}\rangle$.

**Przykładowe rozwiązanie**

Punkt $A = (-5, -8)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = ax^2 + bx - 3$, więc $f(-5) = -8$.

Zbiór $(-\infty;\ -2\rangle$ jest maksymalnym przedziałem, w którym funkcja ta jest rosnąca, więc $-\frac{b}{2a} = -2$.

W celu wyznaczenia współczynników $a$ i $b$ rozwiązujemy układ równań

$$\begin{cases} a \cdot (-5)^2 + b \cdot (-5) - 3 = -8 \\ -\dfrac{b}{2a} = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 25a - 5b = -5 \\ b = 4a \end{cases}$$

$$\begin{cases} 25a - 20a = -5 \\ b = 2a \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = -4 \end{cases}$$

zatem $f(x) = -x^2 - 4x - 3$.

Obliczamy największą wartość funkcji $f$ w przedziale $\langle -3, -\frac{1}{2}\rangle$.

$a < 0$ i $-2 \in \langle -3, -\frac{1}{2}\rangle$, więc $f(-2)$ jest największą wartością funkcji.

$$f(-2) = -(-2)^2 - 4 \cdot (-2) - 3$$
$$f(-2) = 1$$

Obliczamy najmniejszą wartość funkcji $f$ w przedziale $\langle -3, -\frac{1}{2}\rangle$.

$a < 0$, więc najmniejszą wartością funkcji jest $f(-3)$ lub $f\left(-\frac{1}{2}\right)$.

$$f(-3) = -(-3)^2 - 4 \cdot (-3) - 3$$
$$f(-3) = -9 + 12 - 3$$
$$f(-3) = 0$$
$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 3$$
$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} + 2 - 3$$
$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -1\frac{1}{4}$$

Odpowiedź: $\begin{cases} a = -1 \\ b = -4 \end{cases}$, $f_{MAX}(-2) = 1$, $f_{MIN}\left(-\frac{1}{2}\right) = -1\frac{1}{4}$.

**Schemat oceniania**

Rozwiązanie zadania składa się z dwóch etapów.

**I etap** – Wyznaczenie wartości współczynników $a$ i $b$.

a) Zapisanie poprawnie jednego z równań $a \cdot (-5)^2 + b \cdot (-5) - 3 = -8$ albo $-\frac{b}{2a} = -2$.

b) Zapisanie układu równań, np.: $\begin{cases} a \cdot (-5)^2 + b \cdot (-5) - 3 = -8 \\ -\frac{b}{2a} = -2 \end{cases}$.

c) Wyznaczenie $\begin{cases} a = -1 \\ b = -4 \end{cases}$.

Za każdą z części tego etapu zdający otrzymuje po **1 punkcie**.

**II etap** – Wyznaczenie największej i najmniejszej wartości funkcji w przedziale $\langle -3, -\frac{1}{2}\rangle$.

a) Wyznaczenie najmniejszej wartości funkcji $f_{MIN}\left(-\frac{1}{2}\right) = -1\frac{1}{4}$.

b) Wyznaczenie największej wartości funkcji $f_{MAX}(-2) = 1$.

Za każdą z części tego etapu zdający otrzymuje po **1 punkcie**.

**Uwaga**

Jeżeli zdający w pierwszej części rozwiązania popełni błędy przy wyznaczaniu współczynników $a$ i $b$, to za wyznaczenie największej i najmniejszej wartości funkcji może uzyskać **2p** jeśli pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli należy do przedziału $\langle -3, -\frac{1}{2}\rangle$.

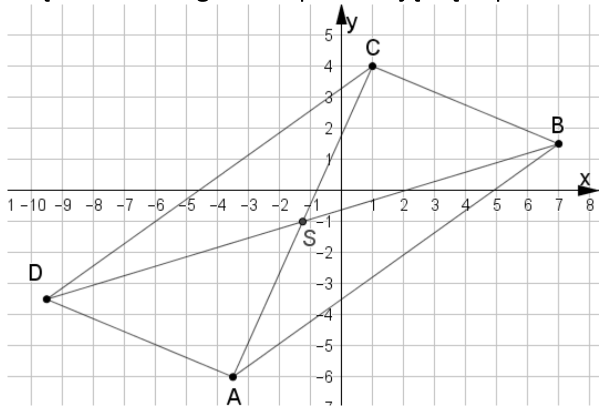
**Zadanie 33. (0-4)**

Punkty $A = \left(-3\frac{1}{2}, -6\right)$, $B = \left(7, 1\frac{1}{2}\right)$ oraz $C = (1, 4)$ są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Wyznacz współrzędne punktu $D$ oraz współrzędne punktu $E$, w którym bok $CD$ przecina oś odciętych (oś OX) układu współrzędnych.

**Przykładowe rozwiązanie**

***I sposób wyznaczenia współrzędnych punktu $D$.***

Wykorzystamy fakt, że przekątne równoległoboku przecinają się w punkcie dzielącym je na połowy.




Wyznaczamy współrzędne środka odcinka $AC$.

$$S = \left(\frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2}\right)$$

$$S = \left(\frac{-3\frac{1}{2} + 1}{2}, \frac{-6 + 4}{2}\right)$$

$$S = \left(-1\frac{1}{4}, -1\right)$$

Środkiem przekątnej $BD$ jest punkt $S$, więc

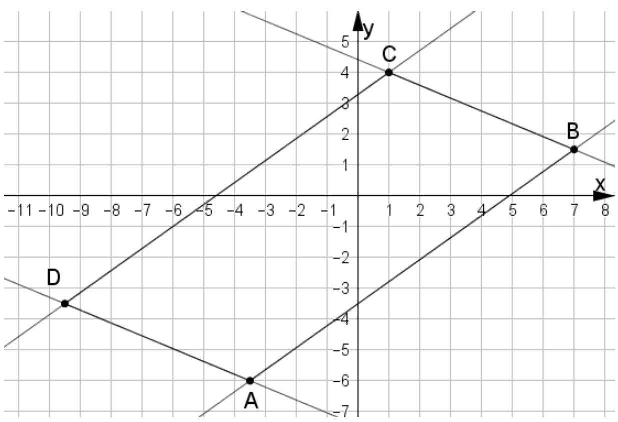
$$S = \left(\frac{x_B + x_D}{2}, \frac{y_B + y_D}{2}\right)$$

$$\left(-1\frac{1}{4}, -1\right) = \left(\frac{7 + x_D}{2}, \frac{1\frac{1}{2} + y_D}{2}\right)$$

zatem $D = \left(-9\frac{1}{2}, -3\frac{1}{2}\right)$.

***II sposób wyznaczenia współrzędnych punktu $D$.***

Skorzystamy z własności równoległości przeciwległych boków równoległoboku.



Wyznaczamy współczynnik kierunkowy prostej $AB$.

$$a_1 = \frac{1\frac{1}{2} + 6}{7 + 3\frac{1}{2}} = \frac{15}{21} = \frac{5}{7}$$

Wyznaczamy równanie prostej $CD$równoległej do $AB$.

$$y = \frac{5}{7}x + b$$
$$4 = \frac{5}{7} \cdot 1 + b$$
$$b = 3\frac{2}{7}$$

Równanie prostej $CD$: $y = \frac{5}{7}x + 3\frac{2}{7}$

Wyznaczamy współczynnik kierunkowy prostej $BC$.

$$a_2 = \frac{4 - 1\frac{1}{2}}{1 - 7} = -\frac{5}{12}$$

Wyznaczamy równanie prostej $AD$równoległej do $BC$.

$$y = -\frac{5}{12}x + b$$
$$-6 = -\frac{5}{12} \cdot \left(-3\frac{1}{2}\right) + b$$
$$-6 = -\frac{5}{12} \cdot \left(-\frac{7}{2}\right) + b$$
$$-6 = \frac{35}{24} + b$$
$$b = -7\frac{11}{24}$$

Równanie prostej $AD$: $y = -\frac{5}{12}x - 7\frac{11}{24}$

Wyznaczamy współrzędne punktu $D$ rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} y = \frac{5}{7}x + 3\frac{2}{7} \\ y = -\frac{5}{12}x - 7\frac{11}{24} \end{cases}$$

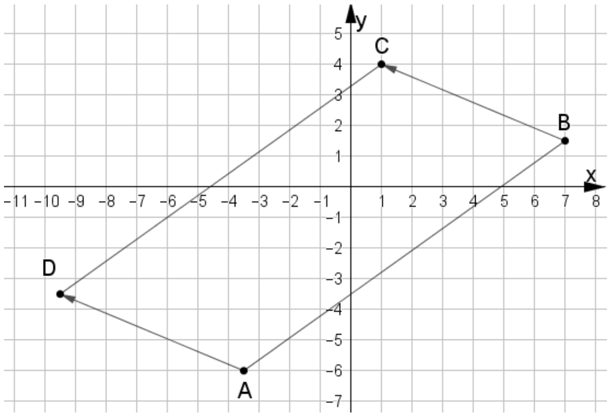
Rozwiązanie układu równań

$$\begin{cases} x = -9\frac{1}{2} \\ y = -3\frac{1}{2} \end{cases}$$

zatem $D = \left(-9\frac{1}{2}, -3\frac{1}{2}\right)$.

***III sposób wyznaczenia współrzędnych punktu $D$.***

Wykorzystamy równość wektorów $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.



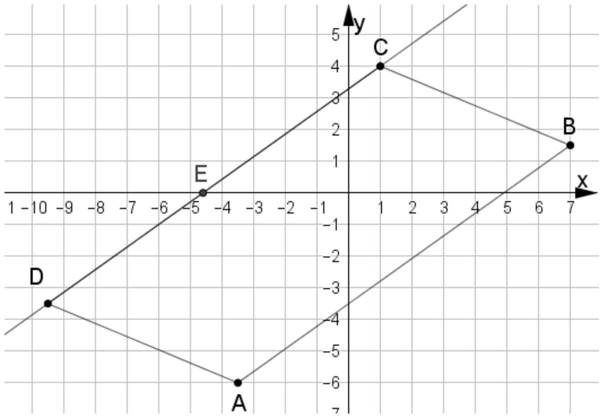

$$\overrightarrow{AD} = \left[x_D + 3\frac{1}{2}, y_D + 6\right]$$

$$\overrightarrow{BC} = \left[1 - 7, 4 - 1\frac{1}{2}\right]$$

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ , więc $x_D + 3\frac{1}{2} = -6$ oraz $y_D + 6 = 2\frac{1}{2}$.

Ostatecznie $x_D = -9\frac{1}{2}$ oraz $y_D = -3\frac{1}{2}$, a zatem $D = \left(-9\frac{1}{2}, -3\frac{1}{2}\right)$.

Wyznaczamy współrzędne punktu $E$, przecięcia boku $CD$ z osią OX układu współrzędnych.




Prosta $DC$ o równaniu $y = \frac{5}{7}x + 3\frac{2}{7}$ przecina oś OX w punkcie $E$, więc

$$\begin{cases} y = \frac{5}{7}x + 3\frac{2}{7} \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = \frac{5}{7}x + 3\frac{2}{7} \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{5}{7}x = \frac{23}{7} \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{23}{5} = -4\frac{3}{5} \\ y = 0 \end{cases}$$

$$E=\left(-4\frac{3}{5},0\right)$$

.......................................................................................................................................................................

**Schemat oceniania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania..........................................................................................................................1p.**

Zdający

- obliczy współrzędne przecięcia się przekątnych $S=\left(-1\frac{1}{4},-1\right)$,

albo

- wyznaczy współczynnik kierunkowy prostej $CD$: $a=\frac{5}{7}$

albo

- wyznaczy współczynnik kierunkowy prostej $AD$: $a=-\frac{5}{12}$

albo

- zapisze równość wektorów np.: $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..........................................................................2p.**

Zdający

- wyznaczy warunki pozwalające na wyznaczenie współrzędnych punktu $D$, np.:

$$\left(-1\frac{1}{4},-1\right)=\left(\frac{7+x_D}{2},\frac{1\frac{1}{2}+y_D}{2}\right)$$

albo

- wyznaczy równania prostych $CD$: $y=\frac{5}{7}x+3\frac{2}{7}$ oraz $AD$: $y=-\frac{5}{12}x-7\frac{11}{24}$

albo

- wyznaczy współrzędne wektorów $\overrightarrow{AD}=\left[x_D+3\frac{1}{2},y_D+6\right]$ oraz $\overrightarrow{BC}=\left[-6,2\frac{1}{2}\right]$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..........................................................................3p.**

Zdający wyznaczy współrzędne punktu $D=\left(-9\frac{1}{2},-3\frac{1}{2}\right)$

**Rozwiązanie pełne .....................................................................................................................4p.**

Zdający wyznaczy współrzędne punktów $D=\left(-9\frac{1}{2},-3\frac{1}{2}\right)$ oraz $E=\left(-4\frac{3}{5},0\right)$.

**Uwaga**

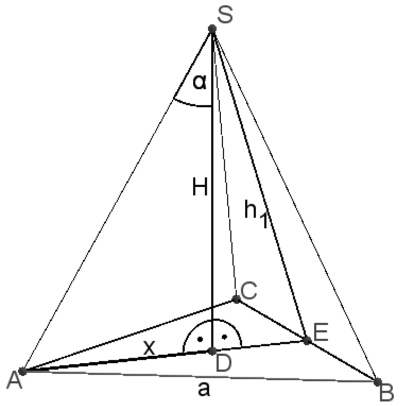
Jeżeli zdający otrzyma współrzędne punktu $D$ dla którego bok $CD$ nie przecina osi OX, to za całe rozwiązanie może otrzymać maksymalnie **2 punkty**.

**Zadanie 34. (0-4)**

Podstawą ostrosłupa prawidłowego trójkątnego $ABCS$ jest trójkąt $ABC$. Wysokość $SD$ ma długość 12 i tworzy z krawędzią boczną kąt, którego tangens jest równy $\frac{1}{2}$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

**Przykładowe rozwiązanie**

Wykonujemy pomocniczy rysunek ostrosłupa $ABCS$ i wprowadzamy oznaczenia tak jak na rysunku.




Trójkąt $ADS$ jest prostokątny, więc

$$tg\alpha = \frac{|AD|}{|SD|} = \frac{x}{H}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{x}{12}$$

$$x = 6$$

$$|DE| = \frac{1}{2}x = 3$$

$$|AE| = |AD| + |DE|$$

$$|AE| = 9$$

$$|AE| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{a\sqrt{3}}{2} = 9$$

$$a = 6\sqrt{3}$$

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego $SDE$ otrzymujemy.

$$|ES|^2 = |ED|^2 + |SD|^2$$

$$(h_1)^2 = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 + H^2$$

$$(h_1)^2 = 3^2 + 12^2$$

$$h_1 = \sqrt{153} = 3\sqrt{17}$$

Obliczamy pole podstawy ostrosłupa.

$$P_P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$P_P = \frac{\left(6\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}{4} = 27\sqrt{3}$$

Obliczamy pole boczne ostrosłupa.

$$P_b = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_1$$

$$P_b = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{17}$$

$$P_b = 27\sqrt{51}$$

Obliczamy pole całkowite ostrosłupa.

$$P_c = P_P + P_b$$

$$P_c = 27\sqrt{3} + 27\sqrt{51} = 27\left(\sqrt{3} + \sqrt{51}\right)$$

**Schemat oceniania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania.................................................................................................................................1p.**

Zdający obliczy $|AD| = 6$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..........................................................................2p.**

Zdający

- obliczy krawędź podstawy graniastosłupa $a = 6\sqrt{3}$

albo

- obliczy długość odcina $|ES| = h_1 = 3\sqrt{17}$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..........................................................................3p.**

Zdający obliczy pole podstawy graniastosłupa $P_P = 27\sqrt{3}$ lub pole boczne $P_b = 27\sqrt{51}$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie pełne .................................................................................................................4p.**

Zdający obliczy $P_c = 27\left(\sqrt{3} + \sqrt{51}\right)$.

**Uwaga.**

1. Jeżeli zdający realizuje strategię rozwiązania i popełnia jedynie błędy rachunkowe, to może otrzymać **3 punkty**, o ile popełnione błędy nie ułatwiają rozważanego zagadnienia na żadnym etapie rozwiązania.

2. Jeżeli zdający popełnia błąd merytoryczny w wyznaczeniu długości boków podstawy *(np. niewłaściwie stosuje* $tg\alpha$ *)* i doprowadza rozwiązanie do końca, to za całe rozwiązanie może uzyskać maksymalnie **2 punkty.**
3. Jeżeli zdający popełnia błąd w wyznaczeniu długości odcinka $AD$ oraz otrzyma taką długość, dla której nie istnieje trójkąt prostokątny $ADS$, to za całe rozwiązanie może uzyskać maksymalnie **1 punkt.**