PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY
W ROKU SZKOLNYM 2018-2019

MATEMATYKA
POZIOM ROZSZERZONY

ZASADY OCENIANIA ZADAŃ
KIELCE – MARZEC 2019

SODMiDN

KIELCE

KLUCZ ODPOWIEDZI DO ZADAŃ ZAMKNIĘTYCH

Nr zadania	1	2	3	4
Liczba punktów	D	B	A	C

ZADANIE KODOWANEJ ODPOWIEDZI

Zadanie 5. (0-2)

Wyznacz $\frac{a}{b}$, gdzie a i b $(a < b)$ są liczbami naturalnymi dodatnimi należącymi do zbioru rozwiązań nierówności $x < \frac{-2x-1}{x-4}$. W poniższe kratki wpisz kolejno cyfrę jedności i pierwsze dwie cyfry po przecinku nieskończonego rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Rozwiązanie:

Rozwiążmy nierówność:

$$x < \frac{-2x-1}{x-4}$$

Założenie: $x \neq 4$

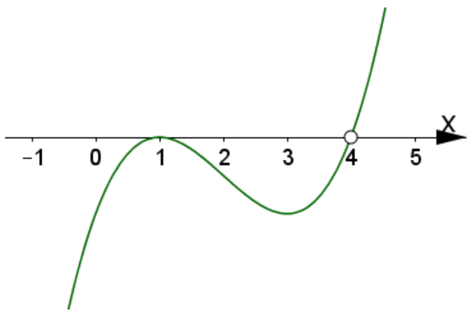
$$x - \frac{-2x-1}{x-4} < 0$$

$$\frac{x^2-4x}{x-4} - \frac{-2x-1}{x-4} < 0$$

$$\frac{x^2-2x+1}{x-4} < 0$$

$$\frac{(x-1)^2}{x-4} < 0$$

$$(x-1)^2(x-4) < 0$$



Rozwiązanie nierówności: $x \in (-\infty; 1) \cup (1; 4)$, zatem $a = 2$ oraz $b = 3$.

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{3} = 0{,}66666\ \ldots$$

Nr zadania	5		
Rozwiązanie	0	6	6

SCHEMAT OCENIANIA ZADAŃ OTWARTYCH

Zadanie 6. (0-3)

Rozwiąż równanie $sin^3x - 4cos^2x - \frac{1}{4}sinx + 3 = 0$ w przedziale $x \in (0,\ 2\pi)$.

Przykładowe rozwiązanie

$$sin^3x - 4cos^2x - \frac{1}{4}sinx + 3 = 0$$

$$sin^3x - 4(1 - sin^2x) - \frac{1}{4}sinx + 3 = 0$$

$$sin^3x + 4sin^2x - \frac{1}{4}sinx - 1 = 0$$

$$sinx = t, \quad t \in \langle -1, 1\rangle$$

$$t^3 + 4t^2 - \frac{1}{4}t - 1 = 0$$

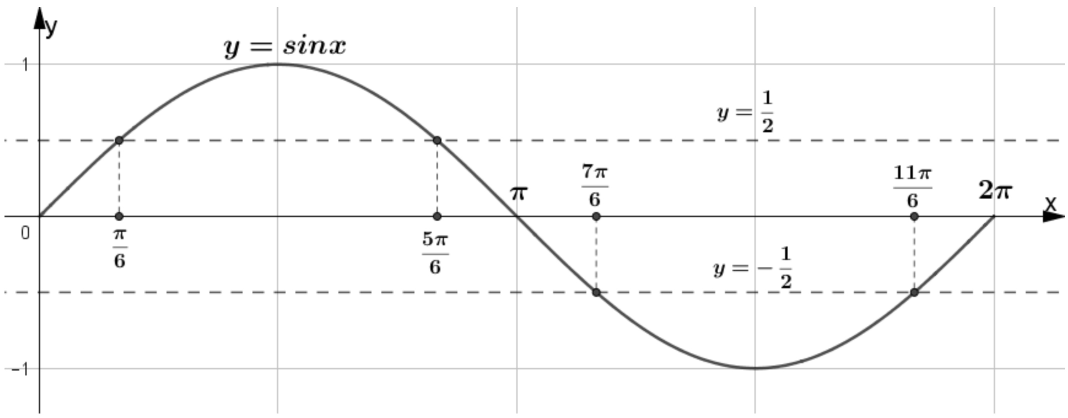
$$t^2(t+4) - \frac{1}{4}(t+4) = 0$$

$$(t+4)\left(t^2 - \frac{1}{4}\right) = 0$$

$$(t+4)\left(t - \frac{1}{2}\right)\left(t + \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$t = -4 \notin \langle -1, 1\rangle \quad \text{lub} \quad t = \frac{1}{2} \quad \text{lub} \quad t = -\frac{1}{2}$$

$$sinx = \frac{1}{2} \quad \text{lub} \quad sinx = -\frac{1}{2}$$



$$x \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$$

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 1 p.

Zdający zapisze równanie używając jednej funkcji trygonometrycznej np.:

$$sin^3x + 4sin^2x - \frac{1}{4}sinx - 1 = 0$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 p.

Zdający wyznaczy wartości funkcji trygonometrycznych

$$sinx = \frac{1}{2} \quad \text{lub} \quad sinx = -\frac{1}{2}$$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy

Rozwiązanie pełne .... 3 p.

Zdający zapisze rozwiązanie równania: $x \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$.

Zadanie 7. (0-3)

Wykaż, że wyrażenie $x^4 - 7x^2 + 4x + 25$ osiąga najmniejszą wartość dla $x = -2$.

Przykładowe rozwiązanie (I sposób)

$$w = x^4 - 7x^2 + 4x + 25$$

$$w = x^4 - 8x^2 + 16 + x^2 + 4x + 4 + 5$$

$$w = (x^2 - 4)^2 + (x + 2)^2 + 5$$

Wykażemy, że wyrażenie w osiąga najmniejszą wartość dla $x = -2$.

Wyrażenie $(x^2 - 4)^2 + (x + 2)^2$ jest sumą liczb nieujemnych. Zauważmy, że wyrażenie to będzie równe 0 gdy

$$(x^2 - 4)^2 = 0 \quad \wedge \quad (x + 2)^2 = 0$$

$$x^2 - 4 = 0 \quad \wedge \quad x + 2 = 0$$

$$(x = -2 \quad \vee \quad x = 2) \quad \wedge \quad x = -2$$

$$x = -2$$

Wyrażenie $(x^2 - 4)^2 + (x + 2)^2$ osiąga najmniejszą wartość równą 0 dla argumentu $x = -2$, więc wyrażenie $w = (x^2 - 4)^2 + (x + 2)^2 + 5$ osiąga najmniejszą wartość równą 5 dla argumentu $x = -2$. To kończy dowód.

Schemat oceniania (I sposobu rozwiązania)

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **2 p.**

Zdający zapisze wyrażenie w postaci $(x^2-4)^2+(x+2)^2+5$
Rozwiązanie pełne .... **3 p.**

Zdający przeprowadzi pełne rozumowanie.

Przykładowe rozwiązanie

II sposób
Wprowadźmy oznaczenie: $\mathrm{W(x)} = \mathrm{x}^4 - 7\mathrm{x}^2 + 4\mathrm{x} + 25.$

Uzasadnimy, że funkcja W osiąga najmniejszą wartość dla argumentu $x=-2$.

$W'(x) = 4x^3 - 14x + 4$

$W'(-2) = 4(-2)^3 - 14\cdot(-2) + 4 = -32 + 28 + 4 = 0$

	4	0	-14	4
-2		-8	16	-4
	4	-8	2	=

$W'(x) = (x+2)(4x^2 - 8x + 2)$

$W'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+2) = 0 \quad lub \quad (4x^2 - 8x + 2) = 0$

$x = -2$ lub $4x^2 - 8x + 2 = 0$

$2\mathrm{x}^2 - 4\mathrm{x} + 1 = 0$

$\Delta = 8$

$$x_1 = \frac{4-2\sqrt{2}}{4} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}\ , \quad x_2 = \frac{4+2\sqrt{2}}{4} = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$$

$$W'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+2)(4x^2 - 8x + 2) > 0$$

$$x \in \left(-2;\ \frac{2-\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2};\ +\infty\right)$$

$$W'(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+2)(4x^2 - 8x + 2) < 0$$

$$x \in (-\infty;\ -2) \cup \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2};\ \frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$$

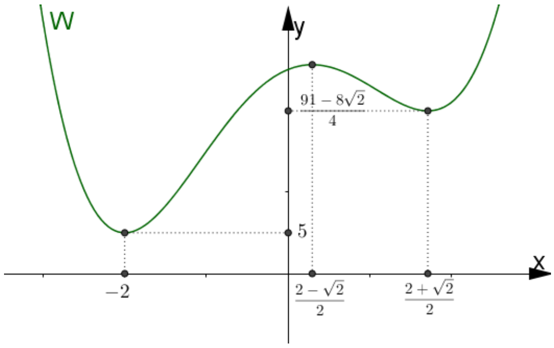
$W(-2) = (-2)^4 - 7\cdot(-2)^2 + 4\cdot(-2) + 25$

$W(-2) = 5$

$$W\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)=\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)^4-7\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)^2+4\cdot\frac{2+\sqrt{2}}{2}+25$$

$$W\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{91-8\sqrt{2}}{4}\approx 19{,}92$$

Z powyższych rozważań wynika, że funkcja W jest malejąca w przedziałach: $(-\infty;\ -2\rangle$ oraz $\langle\frac{2-\sqrt{2}}{2};\ \frac{2+\sqrt{2}}{2}\rangle$, rosnąca w przedziałach $\langle -2;\ \frac{2-\sqrt{2}}{2}\rangle$ oraz $\langle\frac{2+\sqrt{2}}{2};\ +\infty)$, więc funkcja ta osiąga minimum lokalne dla $x=-2$ oraz dla $x=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$.



Skoro $W(-2)=5$ oraz $W\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{91-8\sqrt{2}}{4}\approx 19{,}92$, więc funkcja W osiąga najmniejsza wartość równą 5 dla argumentu $x=-2$.

To kończy dowód.

Schemat oceniania (II sposobu rozwiązania)

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 1 p.

Zdający wyznaczy pochodną wielomianu $\mathrm{W(x)} = \mathrm{x}^4-7\mathrm{x}^2+4\mathrm{x}+25$,

$$W'(x)=4x^3-14x+4$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 p.

Zdający wyznaczy miejsca zerowe pochodnej

$$x_1=-2,\quad x_2=\frac{2-\sqrt{2}}{2},\quad x_3=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$$

Rozwiązanie pełne .... 3 p.

Zdający przeprowadzi pełne rozumowanie.

Zadanie 8. (0-3)

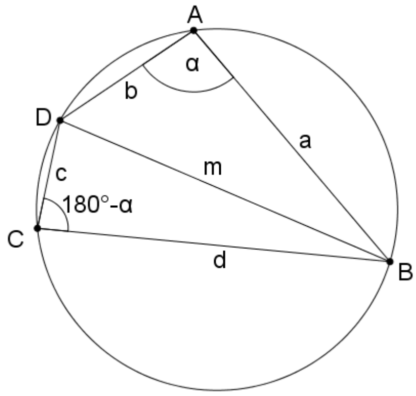
Punkty A, B, C, D są kolejnymi wierzchołkami czworokąta wpisanego w okrąg, w którym $|AB| + |AD| = |CD| + |CB|$. Miara kąta BAD jest równa α. Uzasadnij, że

$$\frac{|AB| \cdot |AD|}{|CD| \cdot |CB|} = \frac{1 - cos\alpha}{1 + cos\alpha}$$

Przykładowe rozwiązanie

Z twierdzenia o czworokącie wpisanym w okrąg wynika, że $|\measuredangle BAD| + |\measuredangle BCD| = 180°$, zatem $|\measuredangle BCD| = 180° - \alpha$.

Wprowadźmy oznaczenia tak jak na rysunku.



Z twierdzenia cosinusów dla trójkątów ABD oraz BCD wynika

$$m^2 = a^2 + b^2 - 2abcos\alpha$$

$$m^2 = c^2 + d^2 - 2cdcos(180° - \alpha)$$

$$a^2 + b^2 - 2abcos\alpha = c^2 + d^2 + 2cdcos\alpha$$

$$(a + b)^2 - 2ab - 2abcos\alpha = (c + d)^2 - 2cd + 2cdcos\alpha$$

Z założenia wynika że $a + b = c + d$, więc

$$-2ab - 2abcos\alpha = -2cd + 2cdcos\alpha$$

$$ab + abcos\alpha = cd - cdcos\alpha$$

$$ab(1 + cos\alpha) = cd(1 - cos\alpha)$$

$$\frac{ab}{cd} = \frac{1 - cos\alpha}{1 + cos\alpha}$$

To kończy dowód.

....

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 1 p.

Zdający przy przyjętych oznaczeniach zapisze

$$a^2+b^2-2abcos\alpha=c^2+d^2-2cdcos(180^0-\alpha)$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 p.

Zdający zapisze dwa równania, z których w łatwy sposób może uzasadnić tezę np.

$a^2+b^2-2abcos\alpha=c^2+d^2+2cdcos\alpha$ oraz $a^2+b^2+2ab=c^2+d^2+2cd$

Rozwiązanie pełne .... 3 p.

Zdający przeprowadzi pełne rozumowanie.

Zadanie 9. (0-3)

W wyścigu kolarskim udział bierze 24 zawodników (sześć 4-osobowych drużyn). Każdy z uczestników wyścigu ma tę samą szansę wygrania. Jakie jest prawdopodobieństwo, że zawodnicy z jednego zespołu uplasują się na trzech pierwszych miejscach?

I sposób rozwiązania

Zdarzeniem elementarnym jest każda 24 wyrazowa permutacja bez powtórzeń zbioru 24 - elementowego.

$$|\Omega|=24!$$

A – zdarzenie polegające na tym, że zawodnicy jednej drużyny uplasują się na trzech pierwszych miejscach.

Trzech zawodników z jednej z sześciu ustalonej drużyny można ulokować na trzech pierwszych miejscach na $V_4^3=\frac{4!}{(4-3)!}=2\cdot3\cdot4=24$ sposoby, pozostałych na $21!$, a zatem

$$|A|=6\cdot24\cdot21!$$

Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A:

$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}$$

$$P(A)=\frac{6\cdot24\cdot21!}{24!}$$

$$P(A)=\frac{6\cdot24}{22\cdot23\cdot24}$$

$$P(A)=\frac{3}{11\cdot 23}=\frac{3}{253}$$

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania... 1 p.

Zdający
- zapisze, że wszystkich możliwych wyników ukończenia wyścigu jest $|\Omega|=24!$

albo
- wyznaczy liczbę wszystkich zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A: $|A|=6\cdot 24\cdot 21!$

Zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale zadanie nie zostało rozwiązane bezbłędnie .... 2 p.

Zdający
- zapisze, że wszystkich możliwych wyników ukończenia wyścigu jest $|\Omega|=24!$ oraz wyznaczy liczbę wszystkich zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A: $|A|=6\cdot 24\cdot 21!$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy

Zadanie zostało rozwiązane bezbłędnie.. 3 p.

Zdający
- obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia $P(A)=\frac{3}{253}$.

II sposób rozwiązania

Rozważmy tylko trzy pierwsze pozycje

Zdarzeniem elementarnym jest każda 3 wyrazowa wariacja bez powtórzeń zbioru 24 - elementowego.

$$|\Omega|=V_{24}^{3}=\frac{24!}{21!}=22\cdot 23\cdot 24=12144$$

Możemy również obliczyć $|\Omega|$ wykorzystując regułę mnożenia.

$$|\Omega|=24\cdot 23\cdot 22=12144$$

A – zdarzenie polegające na tym, że zawodnicy jednej drużyny uplasują się na trzech pierwszych miejscach.

Na trzy pierwsze miejsca można wybrać trzech dowolnych zawodników z każdej 4-osobowej drużyny. Tych drużyn jest 6, więc $|A|=6\cdot V_{4}^{3}=6\cdot\frac{4!}{1!}=6\cdot 24=144$

Możemy również obliczyć $|A|$ wykorzystując regułę mnożenia.

$$|A|=24\cdot 3\cdot 2=144$$

Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

$$P(A) = \frac{144}{12144} = \frac{3}{253}$$

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania .... 1 p.

Zdający

- obliczy, że wszystkich możliwych wyników na trzech pierwszych miejscach jest
$$|\Omega| = 12144$$

albo

- wyznaczy liczbę wszystkich zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A: $|A| = 144$

Zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale zadanie nie zostało rozwiązane bezbłędnie .... 2 p.

Zdający

- zapisze, że wszystkich możliwych wyników na trzech pierwszych miejscach jest $|\Omega| = 12144$ oraz wyznaczy liczbę wszystkich zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A: $|A| = 144$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy

Zadanie zostało rozwiązane bezbłędnie .... 3 p.

Zdający

- obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia $P(A) = \frac{3}{253}$.

Uwaga

Jeżeli zdający pomyli modele przy wyznaczaniu $|A|$ oraz $|\Omega|$, to za całe rozwiązanie otrzymuje maksymalnie **1 punkt** za pierwszy etap rozwiązania.

Zadanie 10. (0-5)

Dla jakich wartości parametru m funkcja $f(x) = x^2 + (3m-4)x + m^2 - 3m + 3$ ma dwa różne miejsca zerowe należące do przedziału $(1, 3)$.

Przykładowe rozwiązanie

I sposób rozwiązania

Zapisujemy układ warunków

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 \in (1,3) \\ x_2 \in (1,3) \end{cases}$$

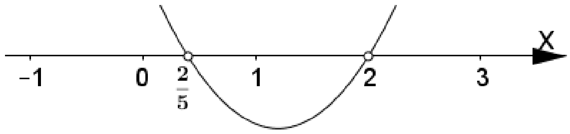
$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ p \in (1,3) \\ f(1) > 0 \\ f(3) > 0 \end{cases}$$

1) Rozwiązujemy nierówność $\Delta > 0$, czyli $(3m-4)^2 - 4(m^2-3m+3) > 0$

$$5m^2 - 12m + 4 > 0$$

$$\Delta = (-12)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 4 = 64$$

$$m_1 = \frac{2}{5},\ m_2 = 2$$



$$m \in \left(-\infty; \frac{2}{5}\right) \cup (2;\ +\infty)$$

2)

$$1 < p < 3$$

$$1 < \frac{-3m+4}{2} < 3$$

$$m \in \left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$$

3)

$$f(1) > 0$$

$$1 + 3m - 4 + m^2 - 3m + 3 > 0$$

$$m^2 > 0$$

$$m \neq 0$$

4)

$$f(3) > 0$$

$$9 + 9m - 12 + m^2 - 3m + 3 > 0$$

$$m^2 + 6m > 0$$

$$m \in (-\infty; -6) \cup (0;\ +\infty)$$

Uwzględniając rozwiązania wszystkich warunków mamy

$$\begin{cases} m \in \left(-\infty; \frac{2}{5}\right) \cup (2;\ +\infty) \\ m \in \left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right) \\ m \neq 0 \\ m \in (-\infty; -6) \cup (0;\ +\infty) \end{cases}$$

Rozwiązanie: $m \in \left(0; \frac{2}{5}\right)$

II sposób rozwiązania

Zapisujemy układ warunków

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 \in (1, 3) \\ x_2 \in (1, 3) \end{cases}$$

Rozwiązujemy nierówność $\Delta > 0$, czyli $m \in \left(-\infty; \frac{2}{5}\right) \cup (2;\ +\infty)$ (rozwiązanie w I sposobie)

Rozwiązujemy uład $\begin{cases} x_1 \in (1, 3) \\ x_2 \in (1, 3) \end{cases}$, czyli

$$(x_1 > 1 \ \wedge \ x_2 > 1) \ \wedge \ (x_1 < 3 \ \wedge \ x_2 < 3)$$

$$\begin{cases} x_1 - 1 > 0 \\ x_2 - 1 > 0 \end{cases} \wedge \begin{cases} x_1 - 3 < 0 \\ x_2 - 3 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x_1 - 1)(x_2 - 1) > 0 \\ (x_1 - 1) + (x_2 - 1) > 0 \end{cases} \wedge \begin{cases} (x_1 - 3)(x_2 - 3) > 0 \\ (x_1 - 3) + (x_2 - 3) < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 > 0 \\ x_1 + x_2 > 2 \end{cases} \wedge \begin{cases} x_1 x_2 - 3(x_1 + x_2) + 9 > 0 \\ x_1 + x_2 < 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m^2 - 3m + 3 + 3m - 4 + 1 > 0 \\ -3m + 4 > 2 \end{cases} \wedge \begin{cases} m^2 - 3m + 3 - 3(-3m + 4) + 9 > 0 \\ -3m + 4 < 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m^2 > 0 \\ m < \frac{2}{3} \end{cases} \wedge \begin{cases} m^2 + 6m > 0 \\ m > -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ m < \frac{2}{3} \end{cases} \wedge \begin{cases} m \in (-\infty; -6) \cup (0;\ +\infty) \\ m > -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$m \in \ (-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{2}{3}\right) \ \wedge \ m \in \ (0;\ +\infty)$$

$$m \in \left(0; \frac{2}{3}\right)$$

Ostatecznie

$$\begin{cases} m \in \left(-\infty; \frac{2}{5}\right) \cup (2; +\infty) \\ m \in \left(0; \frac{2}{3}\right) \end{cases}$$

Rozwiązanie: $m \in \left(0; \frac{2}{5}\right)$

Schemat punktowania

Rozwiązanie składa się z trzech etapów

I etap. Rozwiązanie nierówności $\Delta > 0$.

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt.**

Uwaga

Jeżeli zdający rozwiąże nierówność $\Delta \geq 0$ i nie odrzuci przypadku $\Delta = 0$, to za ten etap otrzymuje **0 punktów.**

II etap. Rozwiązanie układu $\begin{cases} 1 < x_1 < 3 \\ 1 < x_2 < 3 \end{cases}$. Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający może otrzymać **3 punkty.**

Zdający otrzymuje **1 punkt** gdy:

- zapisze układ $\begin{cases} 1 < x_1 < 3 \\ 1 < x_2 < 3 \end{cases}$ w postaci równoważnej zawierającej jedynie sumę i iloczyn pierwiastków trójmianu kwadratowego $x^2 + (3m-4)x + m^2 - 3m + 3$, np.:

$$\begin{cases} x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 1 > 0 \\ x_1 + x_2 > 2 \end{cases} \wedge \begin{cases} x_1x_2 - 3(x_1 + x_2) + 9 > 0 \\ x_1 + x_2 < 6 \end{cases}$$

albo

- zapisze układ $\begin{cases} 1 < x_1 < 3 \\ 1 < x_2 < 3 \end{cases}$ w postaci równoważnej $\begin{cases} p \in (1,3) \\ f(1) > 0 \\ f(3) > 0 \end{cases}$

Zdający otrzymuje **2 punkty** gdy:

- poprawnie rozwiąże jeden z układów

$$\begin{cases} x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 1 > 0 \\ x_1 + x_2 > 2 \end{cases} \wedge \begin{cases} x_1x_2 - 3(x_1 + x_2) + 9 > 0 \\ x_1 + x_2 < 6 \end{cases}$$

i poda jedno z ich rozwiązań: $m \in (-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{2}{3}\right)$ lub $m \in (0; +\infty)$

albo

- poprawnie rozwiąże dwa spośród trzech warunków układu $\begin{cases} p \in (1,3) \\ f(1) > 0 \\ f(3) > 0 \end{cases}$.

$$\begin{cases} m \in \left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right) \\ m \neq 0 \\ m \in (-\infty; -6) \cup (0; +\infty) \end{cases}$$

III etap. Etap ten polega na wyznaceniu części wspólnej zbiorów rozwiązań nierówności z etapów I i II oraz podaniu odpowiedzi $m \in \left(0; \frac{2}{5}\right)$.

Za poprawne rozwiązanie **III etapu** zdający otrzymuje **1 punkt.**

Zadanie 11. (0-5)

Dla jakich wartości parametru m równanie $|1-2x| - |x+3| = -\frac{1}{2}m^2$ ma dwa różne dodatnie rozwiązania?

Przykładowe rozwiązania

I sposób rozwiązania

Szkicujemy wykres funkcji $f(x) = |1-2x| - |x+3|$.

$$|1-2x| = \begin{cases} 1-2x & dla \quad x \le \frac{1}{2} \\ -1+2x & dla \quad x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

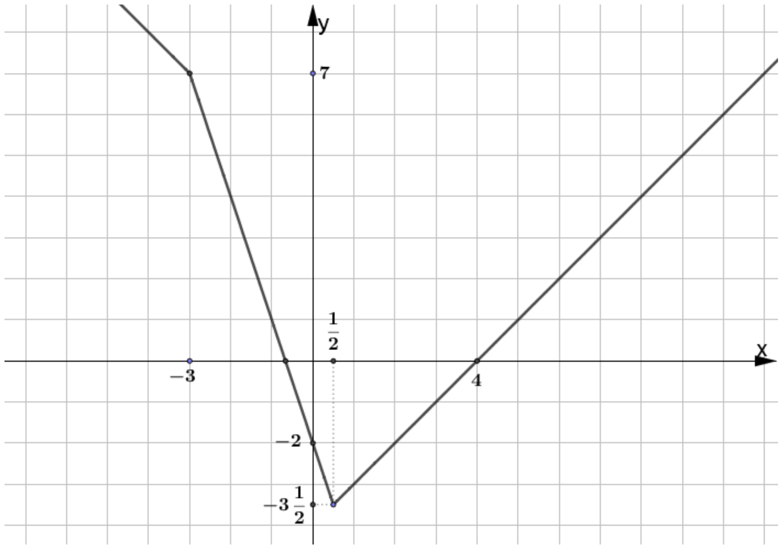
$$|x+3| = \begin{cases} x+3 & dla \quad x \ge -3 \\ -x-3 & dla \quad x < -3 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} (1-2x) - (-x-3) & dla \quad x \in (-\infty; -3) \\ (1-2x) - (x+3) & dla \quad x \in \langle -3; \frac{1}{2}) \\ (-1+2x) - (x+3) & dla \quad x \in \langle \frac{1}{2}; +\infty) \end{cases}$$

Ostatecznie

$$f(x) = \begin{cases} -x+4 & dla \quad x \in (-\infty; -3) \\ -3x-2 & dla \quad x \in \langle -3; \frac{1}{2}) \\ x-4 & dla \quad x \in \langle \frac{1}{2}; +\infty) \end{cases}$$

Szkicujemy wykres funkcji f.



Zauważmy, że aby równamie $|1-2x|-|x+3|=-\frac{1}{2}m^2$ miało dwa różne dodatnie rozwiązania wartość wyrażenia $-\frac{1}{2}m^2$ musi spełniać następujący warunek

$$-3\frac{1}{2}<-\frac{1}{2}m^2<-2$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}m^2>-3\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}m^2<-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m^2<7 \\ m^2>4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m\in\left(-\sqrt{7};\ \sqrt{7}\right) \\ m\in(-\infty;\ -2)\cup(2;\ +\infty) \end{cases}$$

Ostatecznie $m\in\left(-\sqrt{7};\ -2\right)\cup\left(2;\ \sqrt{7}\right)$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp, ale konieczny na drodze pełnego rozwiązania zadania .... 1 p.

Zdający zapisze wyrażenia $|1-2x|$ oraz $|x+3|$ bez użycia symbolu wartości bezwzględnej, np.

$$|1-2x|=\begin{cases} 1-2x & dla \quad x\le\frac{1}{2} \\ -1+2x & dla \quad x>\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$|x+3|=\begin{cases} x+3 & dla \quad x\ge-3 \\ -x-3 & dla \quad x<-3 \end{cases}$$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający zapisze funkcję f bez użycia symbolu wartości bezwzględnej, np.

$$f(x)=\begin{cases}-x+4 \quad dla \quad x\in(-\infty;\ -3)\\ -3x-2 \quad dla \quad x\in\langle -3;\ \frac{1}{2}) \\ x-4 \quad dla \quad x\in\langle \frac{1}{2};\ +\infty)\end{cases}$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.

Zdający naszkicuje wykres funkcji f, na którym zaznaczy punkty charakterystyczne wykresu, koniecznae do poprawnego zapisania układu nierówności.

Rozwiązanie prawie pełne.. 4 p.

Zdający zapisze układ nierówności $\begin{cases}-\frac{1}{2}m^2>-3\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}m^2<-2\end{cases}$

Rozwiązanie pełne .... 5 p.

Zdający zapisze rozwiązanie zadania: $m\in\left(-\sqrt{7};\ -2\right)\cup\left(2;\ \sqrt{7}\right)$

II sposób rozwiązania

$$|1-2x|=\begin{cases}1-2x \quad dla \quad x\le\frac{1}{2}\\ -1+2x \quad dla \quad x>\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$|x+3|=\begin{cases}x+3 \quad dla \quad x\ge-3\\ -x-3 \quad dla \quad x<-3\end{cases}$$

$$|1-2x|-|x+3|=\begin{cases}(1-2x)-(-x-3) \quad dla \quad x\in(-\infty;\ -3)\\ (1-2x)-(x+3) \quad dla \quad x\in\langle -3;\ \frac{1}{2})\\ (-1+2x)-(x+3) \quad dla \quad x\in\langle \frac{1}{2};\ +\infty)\end{cases}$$

Ostatecznie

$$|1-2x|-|x+3|=\begin{cases}-x+4 \quad dla \quad x\in(-\infty;\ -3)\\ -3x-2 \quad dla \quad x\in\langle -3;\ \frac{1}{2})\\ x-4 \quad dla \quad x\in\langle \frac{1}{2};\ +\infty)\end{cases}$$

Rozważmy teraz trzy przedziały:

1) $x \in (-\infty;\ 0\rangle$

Interesują nas dwa różne dodatnie rozwiązania, więc w tym przedziale ich nie ma.

2) $x \in \left(0;\ \frac{1}{2}\right)$

$$-3x - 2 = -\frac{1}{2}m^2$$
$$x = \frac{1}{6}m^2 - \frac{2}{3}$$

$$0 < \frac{1}{6}m^2 - \frac{2}{3} < \frac{1}{2}$$
$$0 < m^2 - 4 < 3$$
$$4 < m^2 < 7$$
$$m \in \left(-\sqrt{7};\ -2\right) \cup \left(2;\ \sqrt{7}\right)$$

3) $x \in \langle\frac{1}{2};\ +\infty)$

$$x - 4 = -\frac{1}{2}m^2$$
$$x = 4 - \frac{1}{2}m^2$$
$$4 - \frac{1}{2}m^2 \geq \frac{1}{2}$$
$$m^2 \leq 7$$
$$m \in \langle -\sqrt{7};\ \sqrt{7}\rangle$$

Ostatecznie $\begin{cases} m \in \left(-\sqrt{7};\ -2\right) \cup \left(2;\ \sqrt{7}\right) \\ m \in \langle -\sqrt{7};\ \sqrt{7}\rangle \end{cases}$, więc $m \in \left(-\sqrt{7};\ -2\right) \cup \left(2;\ \sqrt{7}\right)$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp, ale konieczny na drodze pełnego rozwiązania zadania.. 1 p.

Zdający zapisze wyrażenia $|1-2x|$ oraz $|x+3|$ bez użycia symbolu wartości bezwzględnej, np.

$$|1-2x| = \begin{cases} 1 - 2x & dla \quad x \leq \frac{1}{2} \\ -1 + 2x & dla \quad x > \frac{1}{2} \end{cases}$$
$$|x+3| = \begin{cases} x + 3 & dla \quad x \geq -3 \\ -x - 3 & dla \quad x < -3 \end{cases}$$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający zapisze wyrażenie $|1-2x| - |x+3|$ bez użycia symbolu wartości bezwzględnej, np.

$$|1-2x| - |x+3| = \begin{cases} -x + 4 & dla \quad x \in (-\infty;\ -3) \\ -3x - 2 & dla \quad x \in \langle -3;\ \frac{1}{2}) \\ x - 4 & dla \quad x \in \langle\frac{1}{2};\ +\infty) \end{cases}$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.

Zdający

- wyznaczy wartości $m \in \left(-\sqrt{7};\ -2\right) \cup \left(2;\ \sqrt{7}\right)$, dla których jedno z rozwiązań równania należy do przedziału $\left(0;\ \frac{1}{2}\right)$

albo

- wyznaczy wartości
  $m \in \langle -\sqrt{7};\ \sqrt{7} \rangle$, dla których jedno z rozwiązań równania należy do przedziału $\langle \frac{1}{2};\ +\infty)$

Rozwiązanie prawie pełne .... 4 pkt.

- wyznaczy wartości $m \in \left(-\sqrt{7};\ -2\right) \cup \left(2;\ \sqrt{7}\right)$, dla których jedno z rozwiązań równania należy do przedziału $\left(0;\ \frac{1}{2}\right)$ oraz wyznaczy wartości $m \in \langle -\sqrt{7};\ \sqrt{7} \rangle$, dla których jedno z rozwiązań równania należy do przedziału $\langle \frac{1}{2};\ +\infty)$.

Rozwiązanie pełne .... 5 pkt.

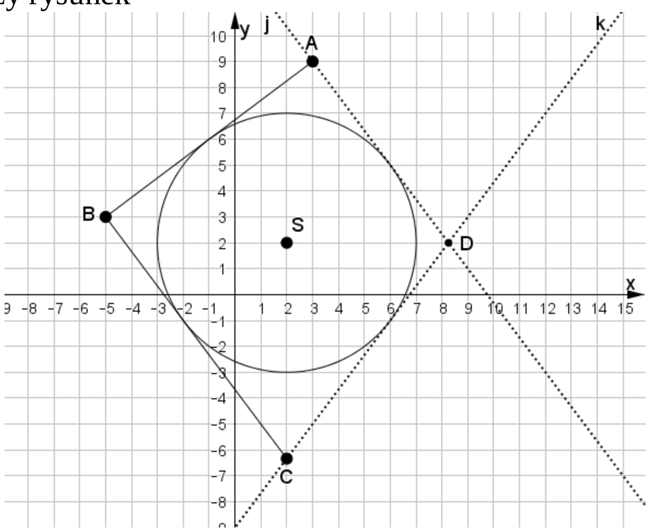
Zdający zapisze rozwiązanie zadania: $m \in \left(-\sqrt{7};\ -2\right) \cup \left(2;\ \sqrt{7}\right)$.

Zadanie 12. (0-5)

Punkty $A = (3,9)$, $B = (-5,3)$ oraz $C = \left(2,-6\frac{1}{3}\right)$ są kolejnymi wierzchołkami czworokąta $ABCD$ opisanego na okręgu o środku w punkcie $S = (2,2)$. Wyznacz współrzędne punktu D.

Przykładowe rozwiązanie

Wykonujemy pomocniczy rysunek



Okrąg jest styczny do boków czworokąta, w szczególności do boku AB, więc promień tego okręgu jest odległością punktu S od prostej AB.

Wyznaczamy więc równanie prostej AB.

$$(y - y_A)(x_B - x_A) - (y_B - y_A)(x - x_A) = 0$$
$$(y - 9)(-5 - 3) - (3 - 9)(x - 3) = 0$$
$$-8(y - 9) + 6(x - 3) = 0$$
$$-8y + 72 + 6x - 18 = 0$$
$$3x - 4y + 27 = 0$$

Obliczamy długość promienia okręgu stycznego do boku AB.

$$r=\frac{|3\cdot 2-4\cdot 2+27|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}$$
$$r=\frac{25}{\sqrt{25}}$$
$$r=5$$

Prosta j przechodzi przez punkt A i jest styczna do okręgu, więc odległość punktu S od prostej j jest równa 5.

$$j:\quad y=ax+b$$

Prosta ta przechodzi przez pnkt $A=(3,9)$, więc $9=3a+b$, a zatem $b=9-3a$.

$$j:\quad y=ax+9-3a$$
$$j:\quad ax-y+9-3a=0$$

Odległość punktu $S=(2,2)$ od prostej $ax-y+9-3a=0$ jest równa 5, więc

$$\frac{|2a-2+9-3a|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=5$$
$$\frac{|7-a|}{\sqrt{a^2+1}}=5$$
$$49-14a+a^2=25(a^2+1)$$
$$24a^2+14a-24=0$$
$$12a^2+7a-12=0$$
$$\Delta=7^2-4\cdot 12\cdot(-12)=625$$
$$\sqrt{\Delta}=25$$
$$a_1=\frac{-7-25}{24}=-\frac{32}{24}=-\frac{4}{3}$$
$$a_1=\frac{-7+25}{24}=\frac{18}{24}=\frac{3}{4}$$

Wyznaczamy równanie prostej j:

dla $a_1=-\frac{4}{3}$

$$y=-\tfrac{4}{3}x+13 \text{ - prosta } AD \text{ – prosta } j,$$

dla $a_2=\frac{3}{4}$

$$y=\tfrac{3}{4}x+\tfrac{27}{4} \text{ - prosta } AB$$

Prosta k przechodzi przez punkt C i jest styczna do okręgu, więc odległość punktu S od prostej k jest równa 5.

$$k:\quad y=cx+d$$

Prosta ta przechodzi przez pnkt $C=\left(2,-6\frac{1}{3}\right)$, więc $-6\frac{1}{3}=2c+d$, a zatem $d=-6\frac{1}{3}-2c$.

$$k:\quad y = cx - 6\frac{1}{3} - 2c$$

$$k:\quad cx - y - 6\frac{1}{3} - 2c = 0$$

Odległość punktu $S = (2, 2)$ od prostej $cx - y - 6\frac{1}{3} - 2c = 0$ jest równa 5, więc

$$\frac{\left|2c - 2 - 6\frac{1}{3} - 2c\right|}{\sqrt{c^2 + (-1)^2}} = 5$$

$$\frac{\left|-8\frac{1}{3}\right|}{\sqrt{c^2 + 1}} = 5$$

$$\frac{625}{9} = 25(c^2 + 1)$$

$$c^2 = \frac{16}{9}$$

$$c_1 = \frac{4}{3},\quad c_2 = -\frac{4}{3}$$

Wyznaczamy równanie prostej k:

dla $c_1 = \frac{4}{3}$

$$y = \frac{4}{3}x - 9 \text{ - prosta } DC \text{ – prosta } k,$$

dla $c_2 = -\frac{4}{3}$

$$y = -\frac{4}{3}x - \frac{11}{3} \text{ - prosta } BC.$$

Wyznaczamy współrzędne punktu D rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} y = -\frac{4}{3}x + 13 \\ y = \frac{4}{3}x - 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{8}{3}x = 22 \\ y = \frac{4}{3}x - 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{33}{4} \\ y = \frac{4}{3} \cdot \frac{33}{4} - 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 8\frac{1}{4} \\ y = 2 \end{cases}$$

Rozwiązanie: $D = \left(8\frac{1}{4}, 2\right)$.

Schemat oceniania
Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp, ale konieczny na drodze pełnego rozwiązania zadania .... 1 p.

Zdający obliczy długość promienia okręgu $r = 5$.
Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający

- zapisze równanie prostej j uzależniając je od jednego parametru, np. $y = ax + 9 - 3a$

albo

- zapisze równanie prostej k uzależniając je od jednego parametru, np. $y = cx - 6\frac{1}{3} - 2c$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.

Zdający

- wyznaczy równanie prostej k: $y = \frac{4}{3}x - 9$

albo

- wyznaczy równanie prostej j: $y = -\frac{4}{3}x + 13$

Rozwiązanie prawie pełne.. 4 pkt.

Zdający wyznaczy równanie prostej k: $y = \frac{4}{3}x - 9$ oraz równanie prostej j: $y = -\frac{4}{3}x + 13$

Rozwiązanie pełne .... 5 pkt.

Zdający wyznaczy współrzędne punktu $D = \left(8\frac{1}{4}, 2\right)$.

Zadanie 13. (0-5)

Liczby $x, y, z,$ w podanej kolejności są trzema początkowymi wyrazami malejącego ciągu geometrycznego (a_n). Suma tych liczb jest równa $3\frac{1}{2}$. Jeżeli od trzeciej z tych liczb odejmiemy $\frac{1}{2}$, to otrzymamy trzy kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego. Wyznacz x, y, z oraz wszystkie wartości n, dla których $a_n \geq \frac{1}{S}$, gdzie S jest sumą wyrazów nieskończonego ciągu (a_n).

Przykładowe rzwiązanie (I sposób)

Liczby x, y, z w podanej kolejności są trzema wyrazami ciągu geometrycznego, więc wprowadzamy następujące oznaczenia:

$$a_1 = x,\ a_2 = xq,\ a_3 = xq^2.$$

Liczby $x,\ y,\ z-\frac{1}{2}$, w podanej kolejności są trzema wyrazami ciągu arytmetycznego, więc

$$xq=\frac{x+xq^2-\frac{1}{2}}{2}.$$

Suma liczb $x,\ y,\ z$, jest równa $3\frac{1}{2}$, więc $x+xq+xq^2=3\frac{1}{2}$.

Rozwiązujemy układ równań $\begin{cases}2xq=x+xq^2-\frac{1}{2}\\ x+xq+xq^2=3\frac{1}{2}\end{cases}$.

Z drugiego równania układu otrzymujemy $x=\frac{7}{2(1+q+q^2)}$, więc

$$2q\cdot\frac{7}{2(1+q+q^2)}=\frac{7}{2(1+q+q^2)}+q^2\cdot\frac{7}{2(1+q+q^2)}-\frac{1}{2}$$

$$14q=7+7q^2-1-q-q^2$$

$$6q^2-15q+6=0$$

$$2q^2-5q+2=0$$

$$\Delta=9$$

$$q_1=\frac{5-3}{4}=\frac{1}{2},\quad q_1=\frac{5+3}{4}=2$$

$$\begin{cases}q=\frac{1}{2}\\ x=\frac{7}{2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)}\end{cases}\ \text{lub}\ \begin{cases}q=2\\ x=\frac{7}{2(1+2+4)}\end{cases}$$

$$\begin{cases}q=\frac{1}{2}\\ x=2\end{cases}\ \text{lub}\ \begin{cases}q=2\\ x=\frac{1}{2}\end{cases}$$

Ciąg (a_n) jest malejący, więc $\begin{cases}q=2\\ x=\frac{1}{2}\end{cases}$ nie spełnia warunków zadania.

Ostatecznie $\begin{cases}q=\frac{1}{2}\\ x=2\end{cases}$, więc $x=2,\ y=1,\ z=\frac{1}{2}$.

Wyznaczamy teraz wszystkie wartości n, dla których $a_n\geq\frac{1}{S}$, gdzie S jest sumą wyrazów nieskończonego ciągu (a_n). W tym celu określimy wzór ogólny ciągu.

$$a_n=a_1q^{n-1}$$

$$a_n=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

Wyznaczamy teraz sumę S wyrazów nieskończonego ciągu (a_n). Iloraz ciągu $q=\frac{1}{2}\in(-1,1)$, więc suma ta istnieje.

$$S=\frac{a_1}{1-q}$$

$$S = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$S = 4$$

Rozwiązujemy nierówność

$$a_n \geq \frac{1}{S}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \geq \frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{2}$$

$$n - 2 \leq 2$$

$$n \leq 4$$

Ostateczne rozwiązanie: $x = 2,\ y = 1,\ z = \frac{1}{2}$, $n \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$.

Przykładowe rzwiązanie (II sposób)

Liczby $x,\ y,\ z$ w podanej kolejności są trzema wyrazami ciągu geometrycznego, więc

$$y^2 = xz$$

Liczby $x,\ y,\ z - \frac{1}{2}$ w podanej kolejności są trzema wyrazami ciągu arytmetycznego, więc

$$y - x = z - \frac{1}{2} - y.$$

Suma liczb $x,\ y,\ z$, jest równa $3\frac{1}{2}$, więc $x + y + z = 3\frac{1}{2}$.

Rozwiązujemy układ równań $\begin{cases} y^2 = xz \\ y - x = z - \frac{1}{2} - y \\ x + y + z = 3\frac{1}{2} \end{cases}$.

Z drugiego równania otrzymujemy $z = 2y + \frac{1}{2} - x$,

$$\begin{cases} y^2 = x\left(2y + \frac{1}{2} - x\right) \\ x + y + 2y + \frac{1}{2} - x = 3\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 = x\left(2y + \frac{1}{2} - x\right) \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = x\left(2\frac{1}{2} - x\right) \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 2\frac{1}{2}x + 1 = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 1 \end{cases}$$

Ciąg (a_n) jest malejący, więc $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 1 \end{cases}$ nie spełnia warunków zadania.

Ostatecznie $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$, więc $x = 2,\ y = 1,\ z = \frac{1}{2}$.

Wyznaczamy teraz wszystkie wartości n, dla których $a_n \geq \frac{1}{S}$, gdzie S jest sumą wyrazów nieskończonego ciągu (a_n). W tym celu określimy wzór ogólny ciągu.

$$\begin{cases} q = \dfrac{1}{2} \\ a_1 = 2 \end{cases}$$

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$a_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

Wyznaczamy teraz sumę S wyrazów nieskończonego ciągu (a_n). Iloraz ciągu $q = \frac{1}{2} \in (-1,1)$, więc suma ta istnieje.

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

$$S = \frac{2}{1-\frac{1}{2}}$$

$$S = 4$$

Rozwiązujemy nierówność

$$a_n \geq \frac{1}{S}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \geq \frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{2}$$

$$n - 2 \leq 2$$

$$n \leq 4$$

Ostateczne rozwiązanie: $x = 2,\ y = 1,\ z = \frac{1}{2}, n \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 p.

Zdający

- zapisze układ równań $\begin{cases} 2xq = x + xq^2 - \frac{1}{2} \\ x + xq + xq^2 = 3\frac{1}{2} \end{cases}$,

albo

- zapisze układ równań $\begin{cases} y^2 = xz \\ y - x = z - \frac{1}{2} - y \\ x + y + z = 3\frac{1}{2} \end{cases}$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający

- doprowadzi do równania z jedną niewiadomą np. $6q^2 - 15q + 6 = 0$

albo

- układ $\begin{cases} y^2 = xz \\ y - x = z - \frac{1}{2} - y \\ x + y + z = 3\frac{1}{2} \end{cases}$ do równania z jedną niewiadomą

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania.. 3 p.

Zdający

- prawidłowo rozwiąże układ $\begin{cases} q = \frac{1}{2} \\ x = 2 \end{cases}$ lub $\begin{cases} q = 2 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$ i wskaże rozwiązanie, które spełnia warunki zadania $\begin{cases} q = \frac{1}{2} \\ x = 2 \end{cases}$,

albo

- prawidłowo rozwiąże układ $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$ i wskaże rozwiązanie, które spełnia warunki zadania $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$,

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie prawie pełne ……………... 4 p.

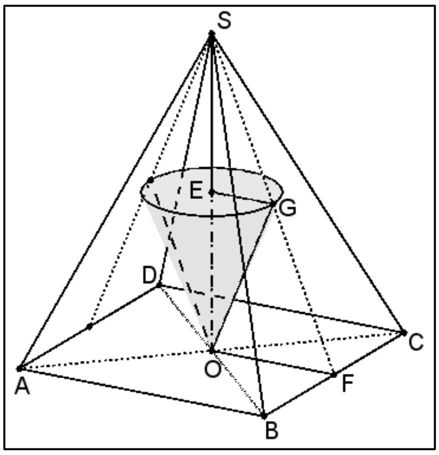
Zdający obliczy $x = 2,\ y = 1,\ z = \frac{1}{2}$ oraz zapisze warunek, z którego może obliczyć ***n***, np.: $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \geq \frac{1}{4}$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne .... 5 p.

Zdający obliczy $x = 2,\ y = 1,\ z = \frac{1}{2}$ oraz $n \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$.

Zadanie 14. (0-6)

W ostrosłup prawidłowy czworokątny $ABCDS$, w którym krawędź podstawy ma długość 10, a krawędź boczna $\sqrt{194}$, wpisano stożek. Wierzchołek stożka znajduje się w punkcie przecięcia przekątnych podstawy ostrosłupa, a jego podstawa równoległa do płaszczyzny podstawy ostrosłupa jest styczna do wszystkich ścian bocznych ostrosłupa (rysunek poniżej). Wyznacz wysokość stożka, jeżeli stosunek objętości stożka do objętości ostrosłupa jest równy $\frac{\pi}{32}$.



Przykładowe rozwiązanie

Obliczamy wysokość ostrosłupa.

Zauważmy, że $|OC| = 5\sqrt{2}$.

$$|OC|^2 + |OS|^2 = |CS|^2$$

$$\left(5\sqrt{2}\right)^2 + |OS|^2 = \left(\sqrt{194}\right)^2$$

$$50 + |OS|^2 = 194$$

$$|OS|^2 = 144$$

$$|OS| = 12$$

Dla ułatwienia zapisów wprowadźmy natępujące oznaczenia: $|OE| = h,\ |EG| = r, |ES| = 12 - h$.

Zauważmy, że $h \in (0; 12)$ oraz $r \in (0; 5)$.

Trójkąty FOS i GES są podobne, więc

$$\frac{FO}{OS}=\frac{GE}{ES}$$

$$\frac{5}{12}=\frac{r}{12-h}$$

$$r=\frac{5(12-h)}{12}$$

$$\frac{V_S}{V_o}=\frac{\pi}{32}$$

$$\frac{\frac{1}{3}\pi r^2 h}{\frac{1}{3}\cdot 10^2\cdot 12}=\frac{\pi}{32}$$

$$\frac{r^2h}{75}=\frac{1}{2}$$

$$2r^2h=75$$

$$2\left(\frac{5(12-h)}{12}\right)^2 h=75$$

$$2\,\frac{25(144-24h+h^2)}{144}h=75$$

$$\frac{144-24h+h^2}{72}h=3$$

$$h^3-24h^2+144h-216=0$$

Korzystając z twierdzenia o wymiernych pierwiastkach wielomianu łatwo sprawdzić, że jednym z rozwiązań równania jest $h=6$.

Dzieląc wielomian $(h^3-24h^2+144h-216)$ przez dwumian $(h-6)$ otrzymujemy

$$(h-6)(h^2-18h+36)=0$$

$$h=6 \quad lub \quad h^2-18h+36=0$$

$$\triangle=(-18)^2-4\cdot 36=180$$

$$\sqrt{\triangle}=6\sqrt{5}$$

$$h_1=\frac{18-6\sqrt{5}}{2}=9-3\sqrt{5}$$

$$h_2=\frac{18+6\sqrt{5}}{2}=9+3\sqrt{5}\ >\ 12$$

Ostatecznie istnieją dwa stożki spełniające warunki zadania, gdzie $h\in\{6,\ 9-3\sqrt{5}\}$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp, ale konieczny na drodze pełnego rozwiązania zadania... 1 p.

Zdający obliczy wysokość ostrosłupa $|OS| = 12$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający zauważy, że trójkąty FOS i GES są podobne zapisując, że np.: $\frac{FO}{OS} = \frac{GE}{ES}$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.

Zdający zapisze układ warunków, np.: $\frac{5}{12} = \frac{r}{12-h}$ oraz $2r^2h = 75$

Rozwiązanie prawie pełne...4 pkt.

Zdający doprowadzi do równania jednej zmiennej, np.: $h^3 - 24h^2 + 144h - 216 = 0$

Rozwiązanie pełne ....5 pkt.

Zdający wyznaczy wysokości dwóch stożków spełniających warunki zadania $h \in \{6,\ 9 - 3\sqrt{5}\}$.

Zadanie 15. (0-6)

Dany jest graniastosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy 6 i wysokości 18. Wysokość tego graniastosłupa zmniejszono o x $(x > 0)$, a wszystkie krawędzie podstaw zwiększono o $\frac{1}{2}$x. Oblicz pole powierzchni całkowitej graniastosłupa, którego objętość jest największa.

Przykładowe rozwiązanie

Zapisujemy objętość graniastosłupa w zależności od wartości x .

$$V(x) = \left(6 + \frac{1}{2}x\right)^2 (18 - x)$$

Ustalamy dziedzinę tej funkcji:

$$D_V = (0; 18)$$

$$V(x) = -\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 72x + 648$$

$$V'(x) = -\frac{3}{4}x^2 - 3x + 72$$

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{4}x^2 - 3x + 72 = 0$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot 72 = 9 + 216 = 225$$

$$x_1 = \frac{3-15}{2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)} = \frac{-12}{-\frac{3}{2}} = 8$$

$$x_2 = \frac{3+15}{2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)} = \frac{18}{-\frac{3}{2}} = -12 \notin D_V$$

$$V'(x) > 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{4}x^2 - 3x + 72 > 0$$

Uwzględniając dziedzinę otrzymujemy $x \in (0; 8)$.

$$V'(x) < 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{4}x^2 - 3x + 72 < 0$$

Uwzględniając dziedzinę otrzymujemy $x \in (8; 18)$.

Funkcja V jest rosnąca w przedziale $(0;\ 8\rangle$, malejąca w przedziale $\langle 8;\ 18)$, a w punkcie $x = 8$ osiąga maksimum lokalne, które jest zarazem największą wartością tej funkcji. W związku z tym dla $x = 8$ objętość graniastosłupa $ABCD$ jest największa.

Obliczamy pole powierzchni całkowitej graniastosłupa, którego objętość jest największa.

Wymary graniastosłupa: krawędź podstawy – 10

wysokość – 10

$$P_c = 6 \cdot 10^2$$

$$P_c = 600$$

Schemat punktowania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

- **Pierwszy etap** składa się z dwóch części:
  a) zapisanie objętości graniastosłupa w zależności od x:
  $V(x) = \left(6 + \frac{1}{2}x\right)^2 (18 - x)$,
  b) określenie dziedziny funkcji: $D_V = (0; 18)$

Za każdą z części tego etapu zdający otrzymuje po **1 punkcie**.

- **Drugi etap** składa się z trzech części:
  a) wyznaczenie pochodnej funkcji wielomianowej $V(x) = -\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 72x + 648$:
  $V'(x) = -\frac{3}{4}x^2 - 3x + 72$,
  b) obliczenie miejsc zerowych pochodnej: $\mathrm{x}_1 = 8, \mathrm{x}_2 - 12$,
  c) uzasadnienie, że dla $x = 8$ funkcja V osiąga największą wartość, np. zapisanie, że w przedziale $(0;\ 8\rangle$ funkcja jest rosnąca, w przedziale $\langle 8;\ 18)$ malejąca oraz $V'(8) = 0$, więc dla $x = 8$ funkcja V osiąga maksimum lokalne, które jest wartością największą tej funkcji.

Za poprawne rozwiązanie każdej z części tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**, o ile poprzednia część etapu została zrealizowana bezbłędnie.

- **Trzeci etap**

Obliczenie pola powierzchni całkowitej graniastosłupa o największej objętości $P_c = 600$.

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.