PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY

W ROKU SZKOLNYM 2019-2020

MATEMATYKA

POZIOM ROZSZERZONY

ZASADY OCENIANIA ZADAŃ

KIELCE – MARZEC 2020

SODMiDN

KIELCE

ODPOWIEDZI DO ZADAŃ ZAMKNIĘTYCH

Nr zadania	**1**	**2**	**3**	**4**
Poprawna odpowiedź	**B**	**D**	**C**	**A**

ZADANIE KODOWANEJ ODPOWIEDZI

Zadanie 5. (0-2)

Dane są zdarzenia losowe $A, B \subset \Omega$ takie, że $P(B') = \frac{1}{3}$ i $P(A \cup B) = \frac{4}{5}$. Oblicz $P(A \setminus B)$, gdzie zdarzenie $A \setminus B$ oznacza różnicę zdarzeń A i B. Zakoduj kolejno pierwsze trzy cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Przykładowe rozwiązanie

Zauważmy, że $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$ oraz $P(B) = 1 - P(B') = \frac{2}{3}$.

Z własności prawdopodobieństwa $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ wynika, że

$$P(A) - P(A \cap B) = P(A \cup B) - P(B)$$

$$P(A \setminus B) = \frac{4}{5} - \frac{2}{3} = \frac{12}{15} - \frac{10}{15}$$

$$P(A \setminus B) = \frac{2}{15} = 0{,}13333\ldots$$

Nr zadania	**5**		
Rozwiązanie	**1**	**3**	**3**

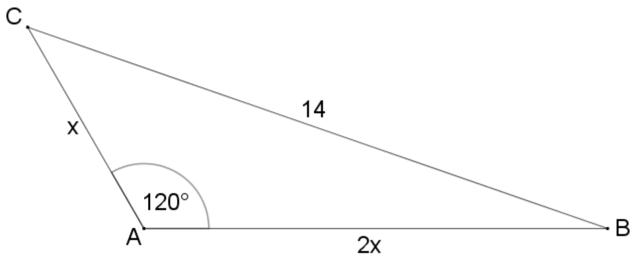
SCHEMAT OCENIANIA ZADAŃ OTWARTYCH

Zadanie 6. (0-3)

W trójkącie ABC długości boków spełniają warunki: $|BC| = 14$, $|AB| = 2|AC|$ oraz miara kąta wewnętrznego BAC jest równa 120^o. Oblicz obwód tego trójkąta.

Przykładowe rozwiązanie (I sposób)

Wykonajmy pomcniczy rysunek i wprowadźmy oznaczenia: $|AC| = x$, $|AB| = 2x$.



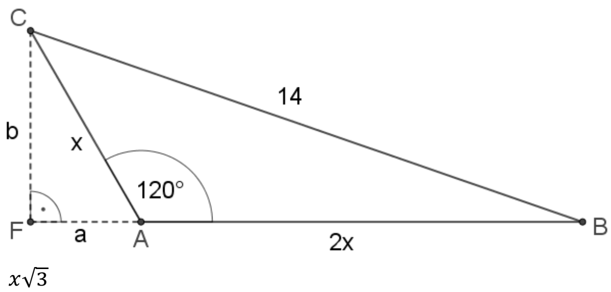
Wykorzystując twierdzenie cosinusów otrzymujemy

$$|BC|^2 = |AC|^2 + |AB|^2 - 2|AC| \cdot |AB| \cdot cos120^o,$$
$$14^2 = x^2 + (2x)^2 - 2x \cdot 2x \cdot cos(180^o - 60^o),$$
$$196 = 5x^2 - 4x^2 \cdot (-cos60^o),$$
$$196 = 5x^2 - 4x^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right),$$
$$7x^2 = 196,$$
$$x^2 = 28,$$
$$x = 2\sqrt{7}$$

Zatem $|AC| = 2\sqrt{7}$, $|AB| = 4\sqrt{7}$, więc obwód trójkąta jest równy $L = 14 + 6\sqrt{7}$.

Przykładowe rozwiązanie (II sposób)

Wykonajmy pomcniczy rysunek i wprowadźmy oznaczenia: $|AC| = x$, $|AB| = 2x$, $|AF| = a$, $|CF| = b$.



Zauważmy, że $a = \frac{x}{2}$, $b = \frac{x\sqrt{3}}{2}$.

Wykorzystuując twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta FBC otrzymujemy

$$|FB|^2 + |FC|^2 = |BC|^2$$
$$\left(\frac{5}{2}x\right)^2 + \left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 14^2$$

$$\frac{25x^2}{4}+\frac{3x^2}{4}=196$$
$$28x^2=784$$
$$x^2=28$$
$$x=2\sqrt{7}$$

Zatem $|AC|=2\sqrt{7},\ |AB|=4\sqrt{7}$, więc obwód trójkąta jest równy $L=14+6\sqrt{7}$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje ....1 p.

jeśli

- zastosuje twierdzenie cosinusów zapisując np.: $|BC|^2=|AC|^2+|AB|^2-2|AC|\cdot|AB|\cdot cos120^o$

albo

- (*II sposób rozwiązania*) zapisze, że $a=\frac{x}{2}$, $b=\frac{x\sqrt{3}}{2}$

albo

- obliczy $cos120^0=-\frac{1}{2}$.

Zdający otrzymuje ....2 p.

jeśli

- zapisze równanie z jedną niewiadomą, w którym podstawia za $\cos120^0$ wartośc $-\frac{1}{2}$ np.:
  $196=5x^2-4x^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$

albo

- (*II sposób rozwiązania*) zapisze równanie z jedną niewiadomą, np.: $\left(\frac{5}{2}x\right)^2+\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)^2=14^2$

Zdający otrzymuje ....3 p.

jeśli obliczy obwód trójkąta $L=14+6\sqrt{7}$.

Zadanie 7. (0-3)

Rozwiąż równanie $2cos^2x=-3sinx$ w przedziale $\langle-\pi;\ 2\pi\rangle$.

Przykładowe rozwiązanie

Przekształcamy równanie w sposób równoważny

$$2cos^2x=-3sinx,$$
$$2(1-sin^2x)=-3sinx\ ,$$
$$-2sin^2x+3sinx+2=0\ ,$$

Dla ułatwienia obliczeń podstawiamy zmienną pomocniczą $sinx = m$, gdzie $m \in \langle -1; 1\rangle$.
$-2m^2 + 3m + 2 = 0$, gdzie $m \in \langle -1; 1\rangle$
Rozwiązując równanie $-2m^2 + 3m + 2 = 0$ otrzymujemy $m = -\frac{1}{2}$, więc $sinx = -\frac{1}{2}$.
Zatem $x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, gdzie k – liczba całkowita.
W przedziale $\langle -\pi;\ \ 2\pi\rangle$ mamy następujące rozwiązania: $x_1 = -\frac{5\pi}{6}, x_2 = -\frac{\pi}{6}, x_3 = \frac{7\pi}{6}, x_4 = \frac{11\pi}{6}$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje ....1 p.

jeśli zapisze równanie przy pomocy jednej funkcji trygonometrycznej, np.:

$$-2sin^2x + 3sinx + 2 = 0.$$

Zdający otrzymuje ....2 p.

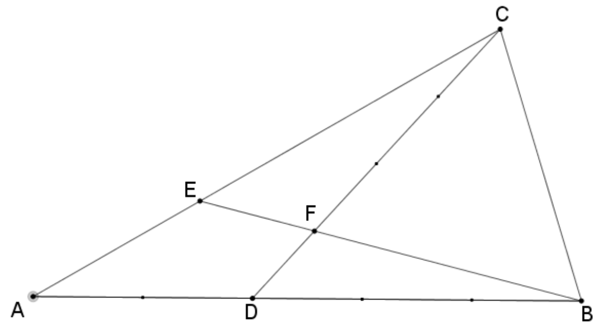
jeśli zapisze, że $sinx = -\frac{1}{2}$.

Zdający otrzymuje ....3 p.

jeśli poda rozwiązanie: $x_1 = -\frac{5\pi}{6}, x_2 = -\frac{\pi}{6}, x_3 = \frac{7\pi}{6}, x_4 = \frac{11\pi}{6}$.

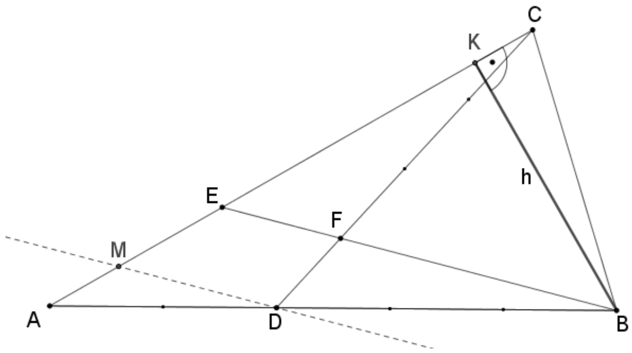
Zadanie 8. (0-3)

Na boku AB trójkąta ABC obrano punkt D w ten sposób, że $\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{2}{3}$. Na odcinku CD obrano taki punkt F, że $\frac{|DF|}{|DC|} = \frac{1}{4}$ (popatrz na rysunek). Przez punkty B i F poprowadzono prostą, która przecięła bok AC w punkcie E. Uzasadnij, że stosunek pola trójkąta AEB do pola trójkąta ECB jest równy $5:9$.



Przykładowe rozwiązanie

Wprowadźmy na rysunku dodatkowo elementy:



Należy uzasadnić, że $\frac{P_{AEB}}{P_{ECB}} = \frac{5}{9}$.

Zauważmy, że $\frac{P_{AEB}}{P_{ECB}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot|AE|\cdot h}{\frac{1}{2}\cdot|EC|\cdot h} = \frac{|AE|}{|EC|}$.

Wystarczy zatem udowodnić, że $\frac{|AE|}{|EC|} = \frac{5}{9}$.

Poprowadźmy prostą DM równoległą do EB. Z twierdzenia Talesa wynika, że $\frac{|AM|}{|ME|} = \frac{|AD|}{|DB|}$,

$$\frac{|AM|}{|ME|} = \frac{2}{3},$$

$$|AM| = \frac{2}{3}|ME|.$$

$$\frac{|DF|}{|DC|}=\frac{1}{4}, \text{ więc } \frac{|DF|}{|FC|}=\frac{1}{3}$$

Z twierdzenia Talesa wynika również, że

$$\frac{|ME|}{|EC|}=\frac{|DF|}{|FC|},$$

$$\frac{|ME|}{|EC|}=\frac{1}{3},$$

$$(1)\ \ |EC|=3|ME|.$$

$$|AE|=|AM|+|ME|,$$

$$|AE|=\frac{2}{3}|ME|+|ME|,$$

$$(2)\ |AE|=\frac{5}{3}|ME|$$

Z (1) i (2) otrzymujemy, że $\frac{|AE|}{|EC|}=\frac{\frac{5}{3}|ME|}{3|ME|}$, więc

$$\frac{|AE|}{|EC|}=\frac{5}{9}.$$

Co należało uzasadnić.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....1 p.

Zdający przy przyjętych oznaczeniach zapisze, że
- szukany stosunek pól trójkątów jest równy stosunkowi $\frac{|AE|}{|EC|}$,

albo
- poprowadzi prostą równoległą do EB przechodzącą przez punkt D i zauważy, że $\frac{|AM|}{|ME|}=\frac{2}{3}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....2 p.

Zdający zapisze, że
- wystarczy udowodnić, że $\frac{|AE|}{|EC|}=\frac{5}{9}$ oraz zauważy, że $\frac{|AM|}{|ME|}=\frac{2}{3}$,

albo
- wystarczy udowodnić, że $\frac{|AE|}{|EC|}=\frac{5}{9}$ oraz zauważy, że $\frac{|ME|}{|EC|}=\frac{1}{3}$.

Rozwiązanie pełne ....3 p.

Zdający przeprowadzi pełne rozumowanie.

Zadanie 9. (0-4)

W kopercie znajduje się 5 kartek oznaczonych cyframi $1, 2, 3, 5, 6$. Losujemy trzykrotnie kartkę za każdym razem zwracając ją do koperty. W ten sposób otrzymujemy trzy kolejno wylosowane liczby. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania takich liczb, aby ich iloczyn był podzielny przez 6.

Przykładowe rozwiązanie

I sposób rozwiązania

Jest to model klasyczny. Za każdym razem mamy 5 możliwości wylosowania jednej karteczki. Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych Ω jest zbiorem wszystkich trójwyrazowych ciągów, którego wyrazami są liczby całkowite z pięciolelementowego zbioru $\{1, 2, 3, 5, 6\}$.
Zatem

$$|\Omega| = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = 125$$

Niech A będzie zdarzeniem polegającym na wylosowaniu trzech liczb takich, że ich iloczyn jest podzielny przez 6.

<u>Rozpatrzmy 4 przypadki:</u>

1) liczba 6 wystąpi dokładnie jeden raz,

$$n_1 = 3 \cdot 4 \cdot 4 = 48,$$

2) liczba 6 wystąpi dokładnie dwa razy,

$$n_2 = 3 \cdot 4 = 12,$$

3) liczba 6 wystąpi dokładnie trzy razy,

$$n_3 = 1,$$

4) liczba 6 nie wystąpi w ogóle.

Aby iloczyn trzech liczb był podzielny przez 6, jednym z czynników musi być 2, drugim 3.

I – (jedna 2, jedna 3) $n_4 = 2 \cdot C_3^2 \cdot 2 = 12,$

II – (jedna 2, dwie 3) $n_5 = 3,$

III – (dwie 2, jedna 3) $n_6 = 3.$

Ostatecznie

$$|A| = 48 + 12 + 1 + 12 + 3 + 3,$$

$$|A| = 79.$$

Zdający może również obliczyć liczbę zdarzeń elementarnych zdarzenia przeciwnego A'.

Nie może pojawić się liczba 6, czyli ropatrywać będziemy tylko liczby ze zbioru $\{1, 2, 3, 5\}$

<u>Rozpatrzmy 4 przypadki:</u>

1) mogą wystąpić tylko liczby 1 i 5

$$k_1 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

2) wystąpi (jedna 2, bez liczby 3) lub (jedna 3, bez liczby 2)

$$k_2 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 24$$

3) wystąpią (dwie 2, bez liczby 3) lub (dwie 3, bez liczby 2)

$$k_3 = 2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$$

4) wystąpią trzy dwójki 2 lub 3 trójki

$$k_4 = 2$$

Zatem $|A'| = 8 + 24 + 12 + 2 = 46$, więc $|A| = 125 - |A'| = 125 - 46 = 79$

Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia, polegającego natym, że iloczyn wylosowanych liczb jest podzielny przez 6.

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|},$$

$$P(A) = \frac{79}{125}.$$

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ....1 p.

Zdający
- obliczy $|\Omega| = 125$

albo
- wypisze wszystkie możliwe rozłączne przypadki, w których wystąpi zdarzenia A,

albo
- wypisze wszystkie możliwe rozłączne przypadki, w których wystąpi zdarzenia A'.

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny ....2 p.

Zdający
- obliczy $|\Omega| = 125$ oraz wypisze wszystkie możliwe rozłączne przypadki, w których wystąpi zdarzenia A,

albo
- obliczy $|\Omega| = 125$ oraz wypisze wszystkie możliwe rozłączne przypadki, w których wystąpi zdarzenia A',

albo

- obliczy $|\Omega| = 125$ oraz obliczy liczbę zdarzeń elementarnych w dwóch spośród 4 przypadków rozpatrywanych dla zdarzenia A:
    1) liczba 6 wystąpi dokładnie jeden raz,
    2) liczba 6 wystąpi dokładnie dwa razy,

3) liczba 6 wystąpi dokładnie trzy razy,
4) liczba 6 nie wystąpi w ogóle.

albo

- obliczy $|\Omega| = 125$ oraz obliczy liczbę zdarzeń elementarnych w dwóch spośród 4 przypadków rozpatrywanych dla zdarzenia A':
  1) mogą wystąpić tylko liczby 1 i 5,
  2) wystąpi (jedna 2, bez liczby 3) lub (jedna 3, bez liczby 2),
  3) wystąpią (dwie 2, bez liczby 3) lub (dwie 3, bez liczby 2),
  4) wystąpią trzy dwójki 2 lub 3 trójki.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 p.

Zdający
- obliczy $|\Omega| = 125$ oraz $|A| = 79$,

albo
- obliczy $|\Omega| = 125$ oraz $|A'| = 46$.

Rozwiązanie pełne ....4 p.

Zdający
- obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia $P(A) = \frac{79}{125}$.

II sposób rozwiązania

Zdający wypisuje wszystkie możliwe wyniki losowania.

1	1	1	2	1	1	3	1	1	5	1	1	6	1	1
1	1	2	2	1	2	3	1	2	5	1	2	6	1	2
1	1	3	2	1	3	3	1	3	5	1	3	6	1	3
1	1	5	2	1	5	3	1	5	5	1	5	6	1	5
1	1	6	2	1	6	3	1	6	5	1	6	6	1	6
1	2	1	2	2	1	3	2	1	5	2	1	6	2	1
1	2	2	2	2	2	3	2	2	5	2	2	6	2	2
1	2	3	2	2	3	3	2	3	5	2	3	6	2	3
1	2	5	2	2	5	3	2	5	5	2	5	6	2	5
1	2	6	2	2	6	3	2	6	5	2	6	6	2	6
1	3	1	2	3	1	3	3	1	5	3	1	6	3	1
1	3	2	2	3	2	3	3	2	5	3	2	6	3	2
1	3	3	2	3	3	3	3	3	5	3	3	6	3	3
1	3	5	2	3	5	3	3	5	5	3	5	6	3	5
1	3	6	2	3	6	3	3	6	5	3	6	6	3	6
1	5	1	2	5	1	3	5	1	5	5	1	6	5	1
1	5	2	2	5	2	3	5	2	5	5	2	6	5	2
1	5	3	2	5	3	3	5	3	5	5	3	6	5	3
1	5	5	2	5	5	3	5	5	5	5	5	6	5	5
1	5	6	2	5	6	3	5	6	5	5	6	6	5	6
1	6	1	2	6	1	3	6	1	5	6	1	6	6	1
1	6	2	2	6	2	3	6	2	5	6	2	6	6	2
1	6	3	2	6	3	3	6	3	5	6	3	6	6	3
1	6	5	2	6	5	3	6	5	5	6	5	6	6	5
1	6	6	2	6	6	3	6	6	5	6	6	6	6	6

$$|\Omega| = 125, \quad |A| = 79$$

(żółtym kolorem zaznaczono zdarzenie przeciwne A')

Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia, polegającego natym, że iloczyn wylosowanych liczb jest podzielny przez 6. $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$, $P(A) = \frac{79}{125}$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ....1 p.

Zdający
- wypisze część zdarzeń elementarnych, ale poda ich liczbę $|\Omega| = 125$,

albo
- wypisze wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzenu A.

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny ....2 p.

Zdający
- wypisze wszystkie zdarzenia elementarne i poda ich ilość $|\Omega| = 125$

albo
- wypisze wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzenu A i poda ich ilość $|A| = 79$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 p.

Zdający
- wypisze wszystkie zdarzenia elementarne lub poda ich ilość $|\Omega| = 125$ oraz wypisze wszystkie zdarzenia elementarne, ale zliczając je popełni błąd, w wyniku czego otrzyma inną liczbę niż $|A| = 79$,

albo
- wypisze wszystkie zdarzenia elementarne lub poda ich ilość $|\Omega| = 125$ oraz wypisze 78 zdarzeń elementarnych, w wyniku czego uzyska prawdopodobieństwo równe $\frac{78}{125}$.

Rozwiązanie pełne ....4 p.

Zdający obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia $P(A) = \frac{79}{125}$.

Zadanie 10. (0-3)

Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność

$$2x^2 + 5y^2 - 4xy > 2x + 4y - 5$$

Przykładowe rozwiązanie (I sposób)

Przekształcamy nierównośc równoważnie:

$$2x^2 + 5y^2 - 4xy - 2x - 4y + 5 > 0$$
$$x^2 - 4xy + 4y^2 + x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 > 0$$
$$(x - 2y)^2 + (x - 1)^2 + (y - 2)^2 > 0$$

Lewa strona nierówności jest sumą liczb nieujemnych.
Wystarczy wykazać, że wyrażenie $(x - 2y)^2 + (x - 1)^2 + (y - 2)^2$ nie może byś równe zeru. Aby suma liczb nieujemnych była równa zeru, każdy ze składników musiałaby być równa zeru

$$(x - 2y)^2 = 0 \quad \text{i} \quad (x - 1)^2 = 0 \ = 0 \quad \text{i} \quad (y - 2)^2 = 0$$
$$x = 2y \quad \text{i} \quad x = 1 \quad \text{i} \quad y = 2,$$

co jest ewidentną sprzecznością, więc

$$(x - 2y)^2 + (x - 1)^2 + (y - 2)^2 > 0$$

<u>To kończy dowód.</u>

Schemat oceniania (I sposób)

Zdający otrzymuje ....2 p.

jeśli zapisze nierówność w postaci $(x - 2y)^2 + (x - 1)^2 + (y - 2)^2 > 0$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje ....3 p.

jeśli przeprowadzi pełne rozumowanie.

Przykładowe rozwiązanie (II sposób)

Zapiszmy nierówność $2x^2 + 5y^2 - 4xy - 2x - 4y + 5 > 0$ w postaci równoważnej:

$$2x^2 + (-4y - 2)x + 5y^2 - 4y + 5 > 0$$

Możemy potraktować tę nierówność, jak nierówność kwadratową z niewiadomą x i porametrem y (lub z niewiadomą y i parametrem x). Wystarczy więc wykazać, że wyróżnik trójmianu $2x^2 + (-4y - 2)x + 5y^2 - 4y + 5$ z niewiadomą x jest ujemny dla dowolnego $y \in R$.

$$\Delta = (-4y - 2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (5y^2 - 4y + 5) = 16y^2 + 16y + 4 - 40y^2 + 32y - 40$$
$$\Delta = -24y^2 + 48y - 36 = -12(2y^2 - 4y + 3)$$

Obliczmy wyróżnik trójmianu $2y^2 - 4y + 3$.

$$\Delta_y = 16 - 24 = -8$$

Wyróżnik trójmianu $2y^2 - 4y + 3$ $\Delta_y < 0$, więc wyrażenie $2y^2 - 4y + 3$ jest dodatnie dla każdej liczby rzeczywistej y, a zatem wyróżnik Δ trójmianu $2x^2 + (-4y - 2)x + 5y^2 - 4y + 5$ z niewiadomą x jest ujemny.

<u>To kończy dowód.</u>

Schemat oceniania (II sposób)

Zdający otrzymuje ....1 p.

jeśli zapisze nierównośc w postaci $2x^2 + (-4y - 2)x + 5y^2 - 4y + 5 > 0$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy

Zdający otrzymuje ....2 p.

jeśli obliczy wyróżnik trójmianu $2x^2 + (-4y - 2)x + 5y^2 - 4y + 5$ np.:

$\Delta = (-4y - 2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (5y^2 - 4y + 5)$ oraz zapisze, że musi uzasadnić, że $\Delta < 0$dla dowolnego $y \in R$.

Zdający otrzymuje ....3 p.

Przeprowadzi pełne rozumowanie.

Zadanie 11. (0-5)

Przez punkt $P = (2; 5)$ poprowadzono dwie proste będące stycznymi do wykresu funkcji $f(x) = -x^2 + 6x - 7$. Wyznacz równania tych stycznych oraz współrzędne punktów styczności.

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Niech prosta k: $y = ax + b$ będzie styczną do wykresu funkcji f. Prosta ta przechodzi przez punkt $P = (2; 5)$ więc $5 = 2a + b$, a zatem $b = 5 - 2a$.

Ostatecznie k: $y = ax + 5 - 2a$.

Wyznaczymy teraz wartość parametru a, dla którego układ $\begin{cases} y = ax + 5 - 2a \\ y = -x^2 + 6x - 7 \end{cases}$ ma jedno rozwiązanie, czyli prosta będzie styczna do paraboli.

Aby układ miał jedno rozwiązanie, równanie $-x^2 + 6x - 7 = ax + 5 - 2a$ też musi mieć jedno rozwiązanie.

$$-x^2 + (6 - a)x + 2a - 12 = 0,$$

$$\Delta = (6 - a)^2 + 4(2a - 12),$$

$$\Delta = a^2 - 4a - 12$$

$$\Delta = 0 \iff a^2 - 4a - 12 = 0,$$

$$(a - 6)(a + 2) = 0,$$

$$a = 6 \ \vee \ a = -2.$$

Istnieją zatem dwie styczne do paraboli przechodzące przez punkt P:

$$k_1\colon\ y = 6x - 7,\ k_2\colon\ y = -2x + 9.$$

Wyznaczamy współrzędne pierwszego punktu styczności.

$$\begin{cases} y = 6x - 7 \\ y = -x^2 + 6x - 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 6x - 7 \\ 6x - 7 = -x^2 + 6x - 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 6x - 7 \\ x^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -7 \\ x = 0 \end{cases}$$

Wyznaczamy współrzędne drugiego punktu styczności.

$$\begin{cases} y = -2x + 9 \\ y = -x^2 + 6x - 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2x + 9 \\ -2x + 9 = -x^2 + 6x - 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2x + 9 \\ x^2 - 8x + 16 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2x + 9 \\ (x-4)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 4 \end{cases}$$

Ostatecznie otrzymujemy punkty styczności: $A_1 = (0, -7)$, $A_1 = (4, 1)$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ....1 p.

Zdający zapisze równanie prostej przechodzącej przez punkt P uzależniając ją od jednego parametru, np.: k: $y = ax + 5 - 2a$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2p.

Zdający zapisze, że układ $\begin{cases} y = ax + 5 - 2a \\ y = -x^2 + 6x - 7 \end{cases}$ musi mieć jedno rozwiązanie.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 p.

Zdający wyznaczy wartości współczynników $a = 6 \ \vee \ a = -2$, dla których układ ma jedno rozwiązanie, czyli prosta jest styczna do paraboli.

Rozwiązanie prawie pełne..........4 p.

Zdający wyznaczy równania stycznych k_1: $y = 6x - 7$, k_2: $y = -2x + 9$.

Rozwiązanie pełne ....5 p.

Zdający obliczy współrzędne punktów styczności: $A_1 = (0, -7)$, $A_1 = (4, 1)$ oraz równania stycznych: k_1: $y = 6x - 7$, k_2: $y = -2x + 9$.

II sposób

Niech punkt $A = \big(m, f(m)\big)$ dla pewnego m, będzie punktem styczności.

Zatem $A = (m, -m^2 + 6m - 7)$.

$f'(x) = -2x + 6$, więc $f'(m) = -2m + 6$.

Zapiszmy równanie stycznej: $y - f(m) = f'(m)(x - m)$,

$y - (-m^2 + 6m - 7) = (-2m + 6)(x - m)$.

Punkt $P = (2; 5)$ należy do stycznej, więc

$$5 - (-m^2 + 6m - 7) = (-2m + 6)(2 - m),$$

$$5 + m^2 - 6m + 7 = 2m^2 - 4m + 12 - 6m,$$

$$m^2 - 4m = 0,$$

$$m = 0 \ \vee \ m = 4,$$

$$f(0) = -7, \ \ f(4) = 1,$$

$$k_1\colon\ y - (-7) = 6x, \ k_2\colon\ y - 1 = -2(x - 4),$$

Ostatecznie otrzymujemy

- punkty styczności: $A_1 = (0, -7)$, $A_1 = (4, 1)$,
- równania stycznych: $k_1\colon\ y = 6x - 7$, $k_2\colon\ y = -2x + 9$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ....1 p.

Zdający

- zapisze współrzędne punktu styczności przy pomocy jednego parametru, np.:

  $A = (m, -m^2 + 6m - 7)$,

albo

- zapisze, że $f'(m) = -2m + 6$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2p.

Zdający zapisze równanie stycznej uzależniając ją od jednego parametru, np.:

$y - (-m^2 + 6m - 7) = (-2m + 6)(x - m)$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 p.

Zdający wyznaczy wartości $m = 0 \ \vee \ m = 4$ dla których prosta jest styczna do paraboli.

Rozwiązanie prawie pełne...4 p.

Zdający

- wyznaczy równania stycznych $k_1\colon\ y = 6x - 7$, $k_2\colon\ y = -2x + 9$,

albo

- wyznaczy współrzędne punktów styczności $\mathrm{A}_1 = (0, -7)$, $\mathrm{A}_1 = (4, 1)$,

albo

- wyznaczy poprawnie tylko jedno równanie stycznej i punkt jej styczności do paraboli.

Rozwiązanie pełne ....5 p.

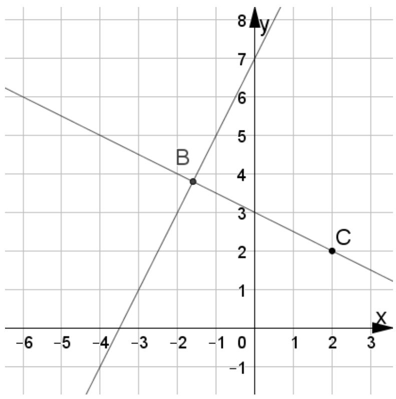
Zdający obliczy współrzędne punktów styczności: $\mathrm{A}_1 = (0, -7)$, $\mathrm{A}_1 = (4, 1)$ oraz równania stycznych: k_1: $\mathrm{y} = 6\mathrm{x} - 7$, k_2: $\mathrm{y} = -2\mathrm{x} + 9$.

Zadanie 12. (0-5)

W trójkącie prostokątnym równoramiennym ABC miara $\measuredangle B$ jest równa 90^o. Przyprostokątna AB tego trójkąta zawiera się w prostej k o równaniu $y = 2x + 7$. Wierzchołek $C = (2, 2)$. Wyznacz współrzędne wierzchołków A oraz B.

Przykładowe rozwiązanie

Punkt B jest punktem przecięcia prostej k oraz prostej do niej prostopadłej przechodzącej przez punkt C.



Wyznaczamy równanie prostej BC. Współczynnik kierunkowy tej prostej to $a = -\frac{1}{2}$.

$$y = -\frac{1}{2}x + b$$

$$2 = -\frac{1}{2} \cdot 2 + b$$

$$b = 3$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 3$$

Wyznaczamy współrzędne punktu B rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 3 \\ y = 2x + 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 7 = -\frac{1}{2}x + 3 \\ y = 2x + 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{5}{2}x = -4 \\ y = 2x + 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{8}{5} \\ y = 2 \cdot \left(-\frac{8}{5}\right) + 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{8}{5} \\ y = \frac{19}{5} \end{cases}$$

$$B = \left(-\frac{8}{5}, \frac{19}{5}\right)$$

Obliczamy długość przyprostokątnej BC.

$$|BC| = \sqrt{\left(2 + \frac{8}{5}\right)^2 + \left(2 - \frac{19}{5}\right)^2}$$

$$|BC| = \sqrt{\left(\frac{18}{5}\right)^2 + \left(-\frac{9}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{405}{25}}$$

$$|BC| = \frac{9\sqrt{5}}{5}$$

I sposób wyznaczenia współrzędnych wierzchołka A.

Punkt A leży na prostej k, więc istnieje taka liczba rzeczywista m, że punkt $A = (m, 2m + 7)$. Trójkąt jest równoramienny więc $|BC| = |AB|$.

$$|AB| = \frac{9\sqrt{5}}{5}$$

$$|AB| = \sqrt{\left(m + \frac{8}{5}\right)^2 + \left(2m + 7 - \frac{19}{5}\right)^2}$$

$$\sqrt{\left(m + \frac{8}{5}\right)^2 + \left(2m + \frac{16}{5}\right)^2} = \frac{9\sqrt{5}}{5}$$

$$m^2 + \frac{16}{5}m + \frac{64}{25} + 4m^2 + \frac{64}{5}m + \frac{256}{25} = \frac{405}{25}$$

$$5m^2 + \frac{80}{5}m - \frac{85}{25} = 0$$

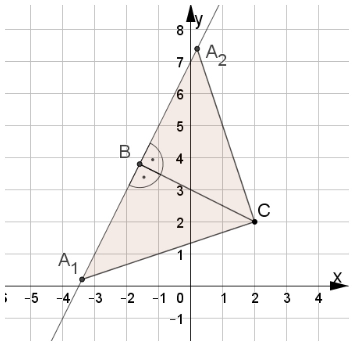
$$25m^2 + 80m - 17 = 0$$

$$\Delta = 80^2 - 4 \cdot 25 \cdot (-17) = 8100, \quad \sqrt{\Delta} = 90$$

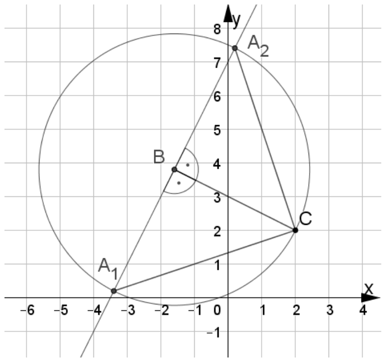
$$m_1 = \frac{-80-90}{50} = -\frac{17}{5},\ m_2 = \frac{-80+90}{50} = \frac{1}{5}$$

$$A_1 = \left(-\frac{17}{5}, 2 \cdot \left(-\frac{17}{5}\right) + 7\right),\ A_2 = \left(\frac{1}{5}, 2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right) + 7\right)$$

$$A_1=\left(-\frac{17}{5},\frac{1}{5}\right),\ A_2=\left(\frac{1}{5},\frac{37}{5}\right)$$



II sposób wyznaczenia współrzędnych wierzchołka A.



$|BC|=|AB|$, więc punkt A leży na okręgu o środku w punkcie B i promieniu $r=|BC|$ o raz na prostej k.

Wystarczy rozwiązać następujący układ równań

$$\begin{cases}\left(x+\frac{8}{5}\right)^2+\left(y-\frac{19}{5}\right)^2=\left(\frac{9\sqrt{5}}{5}\right)^2\\ y=2x+7\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left(x+\frac{8}{5}\right)^2+\left(2x+7-\frac{19}{5}\right)^2=\frac{405}{25}\\ y=2x+7\end{cases}$$

$$x^2+\frac{16}{5}x+\frac{64}{25}+4x^2+\frac{64}{5}x+\frac{256}{25}=\frac{405}{25}$$

$$5x^2+\frac{80}{5}x-\frac{85}{25}=0$$

$$25x^2+80x-17=0$$

$$\Delta=80^2-4\cdot25\cdot(-17)=8100,\qquad \sqrt{\Delta}=90$$

$$x_1=\frac{-80-90}{50}=-\frac{17}{5},\ x_2=\frac{-80+90}{50}=\frac{1}{5}$$

$$\begin{cases}x=-\frac{17}{5}\\ y=2x+7\end{cases}\quad \text{lub} \quad \begin{cases}x=\frac{1}{5}\\ y=2x+7\end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{17}{5} \\ y = \frac{1}{5} \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{5} \\ y = \frac{37}{5} \end{cases}$$

$$A_1 = \left(-\frac{17}{5}, \frac{1}{5}\right),\ A_2 = \left(\frac{1}{5}, \frac{37}{5}\right)$$

III sposób wyznaczenia współrzędnych wierzchołka A.

$$\overrightarrow{BC} = \left[2 + \frac{8}{5}, 2 - \frac{19}{5}\right] = \left[\frac{18}{5}, -\frac{9}{5}\right]$$

Długości wektorów $|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{BA}|$ oraz wektory $\overrightarrow{BC}$ oraz $\overrightarrow{BA}$ są prostopadłe, więc

$$\overrightarrow{BA} = \left[-\frac{9}{5}, -\frac{18}{5}\right] \ \text{lub} \ \overrightarrow{BA} = \left[\frac{9}{5}, \frac{18}{5}\right]$$

$$A_1 = \left(-\frac{8}{5} - \frac{9}{5}, \frac{19}{5} - \frac{18}{5}\right),\ A_1 = \left(-\frac{8}{5} + \frac{9}{5}, \frac{19}{5} + \frac{18}{5}\right)$$

$$A_1 = \left(-\frac{17}{5}, \frac{1}{5}\right),\ A_2 = \left(\frac{1}{5}, \frac{37}{5}\right)$$

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania...1p.

Zdający

- wyznaczamy równanie prostej *BC*: $y = -\frac{1}{2}x + 3$

albo

- wyznaczy długość $|BC| = \frac{9\sqrt{5}}{5}$ (np. korzystając ze wzoru na odległość punktu od prostej)

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp...2p.

Zdający wyznaczy współrzędne wierzchołka $B = \left(-\frac{8}{5}, \frac{19}{5}\right)$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania...3p.

Zdający

- zapisze równanie z jedną niewiadomą, które umożliwi obliczenie jednej ze współrzędnych punktu A, np.

$$\sqrt{\left(m + \frac{8}{5}\right)^2 + \left(2m + \frac{16}{5}\right)^2} = \frac{9\sqrt{5}}{5}$$

albo

- zapisze układ równań

$$\begin{cases}\left(x+\frac{8}{5}\right)^2+\left(y-\frac{19}{5}\right)^2=\left(\frac{9\sqrt{5}}{5}\right)^2\\ y=2x+7\end{cases}$$

albo

- zapisze, że $\overrightarrow{BA}=\left[-\frac{9}{5},-\frac{18}{5}\right]$ lub $\overrightarrow{BA}=\left[\frac{9}{5},\frac{18}{5}\right]$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie prawie pełne...4p.

Zdający

- (1 sposób) rozwiąże równanie $|AB|=\sqrt{\left(m+\frac{8}{5}\right)^2+\left(2m+7-\frac{19}{5}\right)^2}$ otrzymując $m_1=-\frac{17}{5}$, $m_2=\frac{1}{5}$

albo

- (2 sposób) obliczy jedną z niewiadomych x lub y z układu $\begin{cases}\left(x+\frac{8}{5}\right)^2+\left(y-\frac{19}{5}\right)^2=\left(\frac{9\sqrt{5}}{5}\right)^2\\ y=2x+7\end{cases}$:

  $x_1=-\frac{17}{5}, x_2=\frac{1}{5}$ lub $y_1=\frac{1}{5}, y_2=\frac{37}{5}$

albo

- (3 sposób) wyznaczy współrzędne tylko jednego punktu $A_1=\left(-\frac{17}{5},\frac{1}{5}\right)$, lub $A_2=\left(\frac{1}{5},\frac{37}{5}\right)$

Rozwiązanie pełne ....5p.

Zdający wyznaczy współrzędne dwóch punktów $A_1=\left(-\frac{17}{5},\frac{1}{5}\right)$, $A_2=\left(\frac{1}{5},\frac{37}{5}\right)$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający popełni tylko błędy rachunkowe, to za całe rozwiąznie może otrzymać **4 punkty**.

Zadanie 13. (0-5)

Rozwiąż nierówność $\sqrt{x^2-4x+4}+|4-x|\geq 20log_{32}4$.

Przykładowe rozwiązania

I sposób rozwiązania (algebraicznie)

Zauważmy, że $\sqrt{x^2-4x+4}=\sqrt{(x-2)^2}=|x-2|$ oraz $20log_{32}4=20\cdot\frac{2}{5}=8$, więc nierówność można zapisać $|x-2|+|4-x|\geq 8$.

Wyróżniamy na osi liczbowej parami rozłączne przedziały, których sumą jest zbiór liczb rzeczywistych: $(-\infty;\ 2), \langle 2;\ 4), \langle 4;\ +\infty)$.

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & dla \quad x \geq 2 \\ -x+2 & dla \quad x < 2 \end{cases}$$
$$|4-x| = |x-4| = \begin{cases} x-4 & dla \quad x \geq 4 \\ -x+4 & dla \quad x < 4 \end{cases}$$

$$|x-2| + |x-4| = \begin{cases} -x+2-x+4 & dla \quad x \in (-\infty;\ 2) \\ x-2-x+4 & dla \quad x \in \langle 2;\ 4) \\ x-2+x-4 & dla \quad x \in \langle 4;\ +\infty) \end{cases}$$

Ostatecznie

$$|x-2| + |4-x| = \begin{cases} -2x+6 & dla \quad x \in (-\infty;\ 2) \\ 2 & dla \quad x \in \langle 2;\ 4) \\ 2x-6 & dla \quad x \in \langle 4;\ +\infty) \end{cases}$$

Rozważmy teraz trzy przedziały:

1) $x \in (-\infty;\ 2)$
$-2x+6 \geq 8$
$x \leq -1$
rozwiązanie **1):** $x \in (-\infty;\ -1\rangle$,

2) $x \in \langle 2;\ 4)$
$2 \geq 8$
rozwiązanie **2)**: $x \in \Phi$,

3) $x \in \langle 4;\ +\infty)$
$2x-6 \geq 8$
$x \geq 7$
rozwiązanie **3)**:$x \in \langle 7;\ +\infty)$

Ostatecznie $x \in (-\infty;\ -1\rangle \cup \langle 7;\ +\infty)$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp, ale konieczny na drodze pełnego rozwiązania zadania....1 pkt.

Zdający zapisze nierówność w postaci $|x-2| + |4-x| \geq 8$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt.

Zdający zapisze wyrażenia $|x-2|$ oraz $|4-x|$ bez użycia symbolu wartości bezwzględnej, np.

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & dla \quad x \geq 2 \\ -x+2 & dla \quad x < 2 \end{cases}$$
$$|4-x| = \begin{cases} x-4 & dla \quad x \geq 4 \\ -x+4 & dla \quad x < 4 \end{cases}$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt.

Zdający zapisze wyrażenie $|x-2| + |4-x|$ bez użycia symbolu wartości bezwzględnej, np.

$$|x-2| + |4-x| = \begin{cases} -x+2-x+4 & dla \quad x \in (-\infty;\ 2) \\ x-2-x+4 & dla \quad x \in \langle 2;\ 4) \\ x-2+x-4 & dla \quad x \in \langle 4;\ +\infty) \end{cases}$$

Rozwiązanie prawie pełne .... 4 pkt.

Zdający wyznaczy poprawnie rozwiązanie nierówności zawierające się w dwóch rozpatrywanych przedziałach.

Rozwiązanie pełne ....5 pkt.

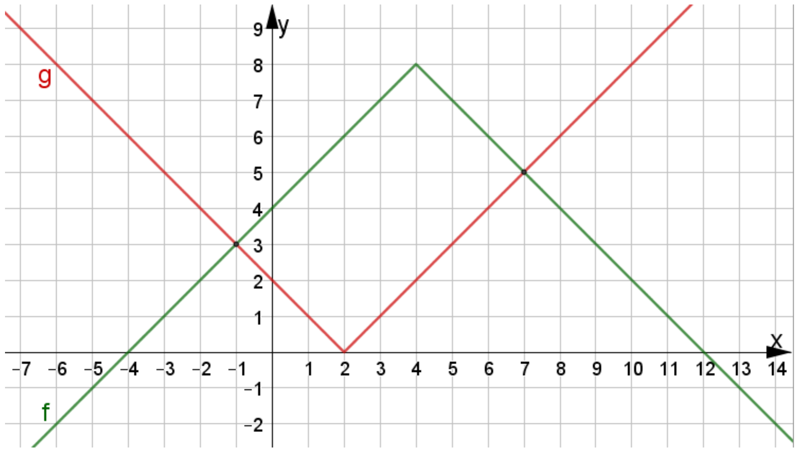
Zdający zapisze rozwiązanie nierówności: $x \in (-\infty;\ -1\rangle \cup \langle 7;\ +\infty)$.

II sposób rozwiązania (graicznie)

Zauważmy, że $\sqrt{x^2-4x+4} = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2|$ oraz $20log_{32}4 = 20 \cdot \frac{2}{5} = 8$, więc nierówność można zapisać $|x-2| \geq -|4-x| + 8$.

Szkicujemy wykresy funkcji $f(x) = -|4-x| + 8$ oraz $g(x) = |x-2|$, aby odczytać rozwiązanie nierówności $f(x) \leq g(x)$ równoważnej $|x-2| + |4-x| \geq 8$.

$$f(x) = \begin{cases} x+4 & dla \quad x < 4 \\ -x+12 & dla \quad x \geq 4 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x-2 & dla \quad x \geq 2 \\ -x+2 & dla \quad x < 2 \end{cases}$$



Odczytujemy odcięte $x_1 = -1,\ x_2 = 7$ punktów przecięcia wykresów obu funkcji i sprawdzamy, czy dla każdego z tych argumentów wartości obu tych funkcji są równe.

$$f(-1) = -|4-(-1)| + 8 = 3 \qquad f(7) = -|4-7| + 8 = 5$$
$$g(-1) = |-1-2| = 3 \qquad g(7) = |7-2| = 3$$
$$f(-1) = g(-1) \qquad f(7) = g(7)$$

Uzasadniliśmy, że $(-1,\ 3)$ oraz $(7,\ 5)$ są punktami przecięcia wykresów.

Zapisujemy odpowiedź: $f(x) \leq g(x) \iff x \in (-\infty;\ -1\rangle \cup \langle 7;\ +\infty)$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp, ale konieczny na drodze pełnego rozwiązania zadania....1 pkt.

Zdający zapisze nierówność w postaci np.: $|x-2| \geq -|4-x| + 8$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp..2 pkt.

Zdający

- zapisze funkcje $f(x) = |x-2|$ oraz $g(x) = -|4-x|+8$ bez użycia symbolu wartości bezwzględnej, np. $f(x) = \begin{cases} x+4 & dla \quad x<4 \\ -x+12 & dla \quad x \geq 4 \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} x-2 & dla \quad x \geq 2 \\ -x+2 & dla \quad x<2 \end{cases}$

albo

- naszkicuje porawnie jeden z wykresów $y = f(x)$ lub $y = g(x)$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 pkt.

- Zdający naszkicuje wykresy funkcji $y = f(x)$ oraz $y = g(x)$.

Rozwiązanie prawie pełne ....4 pkt.

Zdający wyznaczy odcięte $x_1 = -1$, $x_2 = 7$ punktów przecięcia wykresów obu funkcji.

Rozwiązanie pełne ....5 pkt.

Zdający zapisze rozwiązanie nierówności: $x \in (-\infty;\ -1\rangle \cup \langle 7;\ +\infty)$.

Zadanie 14. (0-6)

Dany jest trójmian kwadratowy określony wzorem $f(x) = (m+2)x^2 + (3m+1)x + 3m + 1$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których suma kwadratów dwóch różnych miejsc zerowych trójmianu f jest większa lub równa 1.

Przykładowe rozwiązanie

Z treści zadania wynika, że $m + 2 \neq 0$, więc $m \neq -2$ (f nie może być funkcją liniową).

Funkcja f ma dwaróżne miejsca zerowe, gdy jego wyróżnik $\Delta > 0$, czyli

$$(3m+1)^2 - 4 \cdot (m+2)(3m+1) > 0,$$
$$9m^2 + 6m + 1 - 4 \cdot (3m^2 + m + 6m + 2) > 0,$$
$$9m^2 + 6m + 1 - 12m^2 - 28m - 8 > 0,$$
$$-3m^2 - 22m - 7 > 0,$$
$$\Delta = 484 - 84 = 400,$$
$$m_1 = \frac{22-20}{-6} = -\frac{1}{3},\ m_2 = \frac{22+20}{-6} = -7.$$

Stąd $m \in \left(-7;\ -\frac{1}{3}\right)$.

$D = (-7;\ -2) \cup \left(-2;\ -\frac{1}{3}\right)$ jest zbiorem wszystkich wartości parametru m, dla których funkcja f jest trójmianem kwadratowym i ma dwa różne pierwiastki.

Warunek $x_1^2 + x_2^2 \geq 1$ możemy zapisać w postaci równoważnej $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 \geq 1$.
Korzystając ze wzorów Vite'a otrzymujemy

$$\left(\frac{-3m-1}{m+2}\right)^2 - 2\frac{3m+1}{m+2} \geq 1,$$
$$\frac{9m^2+6m+1}{(m+2)^2} - \frac{2(3m+1)(m+2)}{(m+2)^2} - \frac{(m+2)^2}{(m+2)^2} \geq 0,$$

$$\frac{9m^2+6m+1-2(3m^2+7m+2)-(m^2+4m+4)}{(m+2)^2} \geq 0,$$

$$\frac{2m^2-12m-7}{(m+2)^2} \geq 0,$$

$$(2m^2-12m-7)(m+2)^2 \geq 0 \text{ i } m \neq -2$$

$$\Delta_m = (-12)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-7) = 144 + 56 = 200,$$

$$m_3 = \frac{12-10\sqrt{2}}{4} = \frac{6-5\sqrt{2}}{2} \approx -0{,}54,\ m_4 = \frac{12+10\sqrt{2}}{4} = \frac{6+5\sqrt{2}}{2} \approx 6{,}53.$$

Ostatecznie rozwiązaniem tej nierówności jest zbiór $m \in (-\infty;\ -2) \cup \left(-2;\ \frac{6-5\sqrt{2}}{2}\right\rangle \cup \left\langle\frac{6+5\sqrt{2}}{2}\ ;\ +\infty\right)$

Uwzględniając teraz dziedzinę D otrzymujemy ostateczne rozwiązanie zadania

$$m \in (-7;\ -2) \cup \left(-2;\ \frac{6-5\sqrt{2}}{2}\right\rangle$$

Schemat punktowania

Rozwiązanie składa się z czterech etapów

I etap. Zapisanie warunku, że $m \neq -2$.

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt.**

Uwaga

- Jeżeli zdający nie zapisze warunku $m \neq -2$, ale z rozwiązania zadania wynika, że go uwzględnia, to za pierwszy etap uzyskuje **1 punkt**.

II etap. Rozwiązanie nierówności $\Delta > 0$.

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt.**

Uwaga

- Jeżeli zdający rozwiąże nierówność $\Delta \geq 0$ i nie odrzuci przypadku $\Delta = 0$, to za ten etap otrzymuje **0 punktów.**

III etap. Rozwiązanie warunku $x_1^2 + x_2^2 \geq 1$.

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający może otrzymać **3 punkty.**

Zdający otrzymuje **1 punkt** gdy zapisze warunek $x_1^2 + x_2^2 \geq 1$ w postaci równoważnej zawierającej jedynie sumę i iloczyn pierwiastków trójmianu kwadratowego $(m+2)x^2 + (3m+1)x + 3m + 1$, np.:

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 \geq 1 \ ,$$

Zdający otrzymuje **2 punkty** gdy doprowadzi nierówność $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 \geq 1$ do postaci z jedną niewiadomą, np.: $\left(\frac{-3m-1}{m+2}\right)^2 - 2\frac{3m+1}{m+2} \geq 1$.

Zdający otrzymuje **3 punkty** gdy poprawnie rozwiąże nierówność

$$m \in (-\infty;\ -2) \cup \left(-2;\ \frac{6-5\sqrt{2}}{2}\right\rangle \cup \left\langle\frac{6+5\sqrt{2}}{2}\ ;\ +\infty\right).$$

IV etap. Etap ten polega na wyznaceniu części wspólnej zbiorów rozwiązań nierówności z etapów I , II i III oraz podaniu odpowiedzi $m \in (-7;\ -2) \cup \left(-2;\ \frac{6-5\sqrt{2}}{2}\right\rangle$.

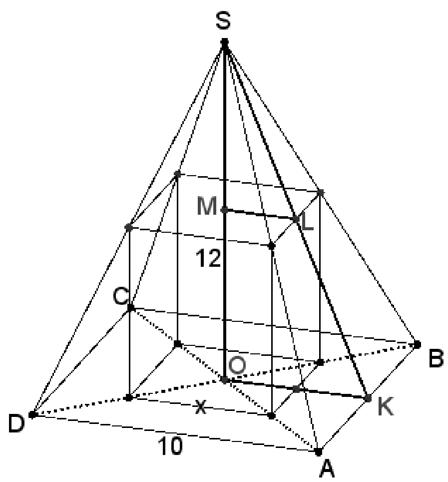
Za poprawne rozwiązanie **IV etapu** zdający otrzymuje **1 punkt.**

Zadanie 15. (0-7)

W ostrosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy 10 i wysokości 12 wpisano graniastosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy x tak, że jego podstawa zawiera się w podstawie ostrosłupa, a wierzchołki drugiej podstawy należą do krawędzi bocznych tego ostrosłupa. Wyznacz pole powierzchni całkowitej tego z rozpatrywanych graniastosłupów, którego objętość jest największa.

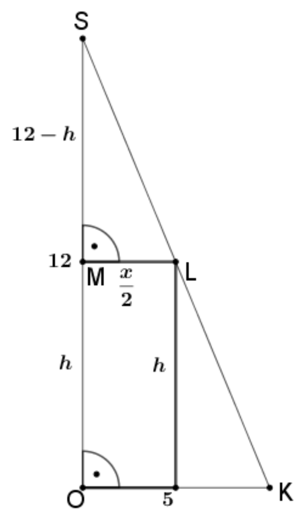
Przykładowe rozwiązanie

Wykonujemy pomocniczy rysunek i wprowadzamy oznaczenia takie jak na rysunku.



a) Rozpatrywany graniastosłup istnieje tylko dla $x \in (0; 10)$.

b) Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Zauważmy, że trójkąty KOS oraz LMS są podobne, więc $\frac{SM}{ML} = \frac{SO}{OK}$, zatem $\frac{12-h}{\frac{x}{2}} = \frac{12}{5}$.

$$h = \frac{60 - 6x}{5}$$

Objętość graniastosłupa jest równa $V = x^2 \cdot h$.

Zatem

$$V(x) = x^2 \cdot \frac{60-6x}{5},$$

$$V(x) = x^2 \cdot \left(12 - \frac{6}{5}x\right),$$

$$V(x) = -\frac{6}{5}x^3 + 12x^2 \text{ dla } x \in (0; 10).$$

c)

Pochodna funkcji V jest równa

$$V'(x) = -\frac{18}{5}x^2 + 24x \text{ dla } x \in (0; 10).$$

$V'(x) = 0 \iff -\frac{18}{5}x^2 + 24x = 0 \wedge x \in (0; 10) \iff x = 6\frac{2}{3}$

$V'(x) > 0 \iff -\frac{18}{5}x^2 + 24x > 0 \wedge x \in (0; 10) \iff x = \left(0;\ 6\frac{2}{3}\right)$

$V'(x) < 0 \iff -\frac{18}{5}x^2 + 24x < 0 \wedge x \in (0; 10) \iff x = \left(6\frac{2}{3};\ 10\right)$

Oznacza to, że w przedziale $\left(0;\ 6\frac{2}{3}\right\rangle$ funkcja V jest rosnąca, w przedziale $\left\langle 6\frac{2}{3};\ 10\right)$ jest malejąca, a w punkcie $x = 6\frac{2}{3}$ osiąga maksimum lokalne, które jest zarazem największą wartością funkcji V.

Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa o największej objętości jest równe

$$P_c = 2x^2 + 4xh,$$

$$P_c = 2\left(\frac{20}{3}\right)^2 + 4 \cdot \frac{20}{3} \cdot \frac{60-6\cdot\frac{20}{3}}{5},$$

$$P_c = \frac{800}{9} + \frac{80}{3} \cdot 4 = \frac{800}{9} + \frac{960}{9},$$

$$P_c = \frac{1760}{9} = 195\frac{5}{9}.$$

Schemat punktowania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

- **Pierwszy etap** składa się z trzech części:
  a) Wyznaczenie zależności między wysokością graniastosłupa a krawędzią jego podstawy, np.: $\frac{12-h}{\frac{x}{2}} = \frac{12}{5}$,
  b) zapisanie objętości graniastosłupa w zależności od x: $V(x) = -\frac{6}{5}x^3 + 12x^2$,
  c) określenie dziedziny funkcji: D_V: $x \in (0; 10)$.

Za każdą z części tego etapu zdający otrzymuje po **1 punkcie**.

- **Drugi etap** składa się z trzech części:
  a) wyznaczenie pochodnej funkcji wymiernej $V(x) = -\frac{6}{5}x^3 + 12x^2$:

$V'(x) = -\frac{18}{5}x^2 + 24x$,

b) obliczenie miejsca zerowego pochodnej: $x = 6\frac{2}{3}$,

c) uzasadnienie, że dla $x = 6\frac{2}{3}$ funkcja V osiąga największą wartość, np. zapisanie, że w przedziale $\left(0;\ 6\frac{2}{3}\right\rangle$ funkcja V jest rosnąca, w przedziale $\left\langle 6\frac{2}{3};\ 10\right)$ jest malejąca, a w punkcie $x = 6\frac{2}{3}$ osiąga maksimum lokalne, które jest zarazem największą wartością funkcji V.

Za poprawne rozwiązanie każdej z części tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**, o ile poprzednia część etapu została zrealizowana bezbłędnie.

- **Trzeci etap**

Obliczenie pola powierzchni graniastosłupa o największej objętości $P_c = 195\frac{5}{9}$.

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.