PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY

W ROKU SZKOLNYM 2022-2023

SODMiDN

KIELCE

MATEMATYKA

POZIOM PODSTAWOWY

ZASADY OCENIANIA ZADAŃ

KIELCE – MARZEC 2023

KLUCZ ODPOWIEDZI DO ZADAŃ ZAMKNIĘTYCH

Nr zadania	1	2	3	4	5 (2 pkt.)	6	8	9	10
ODP	A	D	B	D	A F	D	A3	C	A

Nr zadania	11.1	12	13	14 (2 pkt.)	15	16.1	16.2	16.3	17
OPD	F **P**	C	D	B **D**	D	F **P**	C	D	A

Nr zadania	**18**	**19.1**	**19.2**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**
ODP	**A**	**D**	**A**	**A**	**D**	**C**	**B**	**D**	**C**

Zasady oceniania zadań 5 i 14

2 pkt – wybranie dwóch poprawnych odpowiedzi
1 pkt – wybranie jednej lub dwóch odpowiedzi, z których jedna jest poprawna
0 pkt – odpowiedź całkowicie niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Schemat oceniania zadań otwartych

Zadanie 7. (0-2)

Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej nieparzystej n wyrażenie $3n^2 + 6n + 5$ przy dzieleniu przez 12 daje resztę 2.

Zasady oceniania

2 pkt – zapisanie danego wyrażenia w postaci $12 \cdot (k^2 + 2k + 1) + 2$ oraz zapisanie, że $k^2 + 2k + 1$ jest liczbą naturalną

1 pkt – zapisanie danego wyrażenia w postaci $12 \cdot (k^2 + 2k + 1) + 2$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Przykładowe rozwiązanie

Nieparzystą liczbę n możemy zapisać w postaci $n = 2k + 1$, gdzie $k \in \mathbb{N}$.

Wtedy

$$3n^2 + 6n + 5 = 3(2k+1)^2 + 6(2k+1) + 5 = 3(4k^2 + 4k + 1) + 12k + 6 + 5 =$$

$$= 12k^2 + 12k + 3 + 12k + 11 = 12k^2 + 24k + 14 = 12 \cdot (k^2 + 2k + 1) + 2$$

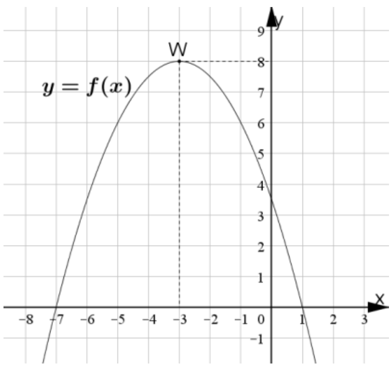
Ponieważ liczba k jest liczbą naturalną, to liczba $k^2 + 2k + 1$ jest naturalna.

Iloczyn $12 \cdot (k^2 + 2k + 1)$ jest wielokrotnością liczby 12, zatem $12 \cdot (k^2 + 2k + 1) + 2$ przy dzieleniu przez 12 daje resztę 2.

To należało wykazać.

Zadanie 11.

W kartezjańskim układzie współrzędnych przedstawiono fragment wykresu funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$. Wierzchołek paraboli, która jest wykresem funkcji f, ma współrzędne $(-3,\ 8)$. Parabola ta przecina oś OX w punktach $(-7,\ 0)$ oraz $(1,\ 0)$.



Zadanie 11.2. (0-1)

Zapisz poniżej zbiór wszystkich wartości m, dla których nierówność $f(x) > m$ nie ma rozwiązań.

Odp: $m \in [8;\ +\infty)$ albo $m \geq 8$

Zadanie 11.3. (0-2)

Wyznacz wzór funkcji kwadratowej f w postaci iloczynowej.

Zasady oceniania

2pkt – wyznaczenie postaci iloczynowej $f(x) = -\frac{1}{2}(x+7)(x-1)$

1 pkt – zapisanie funkcji f w postaci $f(x) = a(x+7)(x-1)$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe rozwiązanie

$$f(x) = a(x+7)(x-1)$$

Punkt $(-3,\ 8)$ należy do wykresu funkcji, więc

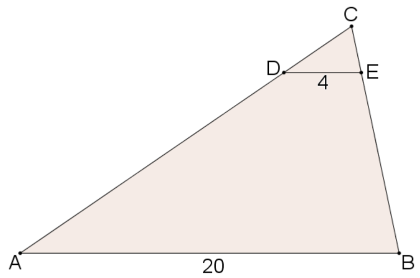
$$8 = a(-3+7)(-3-1)$$

$$a = -\frac{1}{2}$$

A zatem postać kanoniczna funkcji f, to $f(x) = -\frac{1}{2}(x+7)(x-1)$

Zadanie 26. (0-3)

Odcinki AB i DE są równoległe. Długości odcinków AB i DE są odpowiednio równe 20 i 4. Pole trójkąta DEC jest równe 5. Oblicz pole trapezu $ABDE$.



Zasady oceniania

3 pkt – obliczenie pola trapezu $ABDE$: $P = 120$

2 pkt – obliczenie pola trójkąta ABC: $P = 125$

ALBO

obliczenie wysokości trapezu $ABED$: $h = 10$

ALBO

zapisanie zależności między polami trójkątów ABC i DEC: $\frac{P_{ABC}}{P_{DEC}} = 5^2$

1 pkt – obliczenie skali podobieństwa trójkątów ABC oraz DEC: $\left(k = 5 \ albo \ k = \frac{1}{5}\right)$

ALBO

obliczenie wysokości trójkąta EDC: $h = 2{,}5$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę albo brak rozwiązania.

Przykładowe rozwiązania

Sposób I

Z warunków zadania wynika, że odcinki AB i DE są równoległe, więc

$$|\sphericalangle EDC| = |\sphericalangle BAC| \text{ oraz } |\sphericalangle DEC| = |\sphericalangle ABC|.$$

Trójkąt ABC jest podobny do trójkąta DEC w skali $k = \frac{20}{4} = 5$. (cecha podobieństwa kąt, kąt, kąt)

Obliczamy pole trójkąta ABC.

$$\frac{P_{ABC}}{P_{DEC}} = k^2$$

$$\frac{P_{ABC}}{5} = 5^2$$

$$P_{ABC} = 125$$

Obliczamy pole trapezu $ABDE$.

$$P_{ABDE} = P_{ABC} - P_{DEC}$$

$$P_{ABDE} = 125 - 5$$

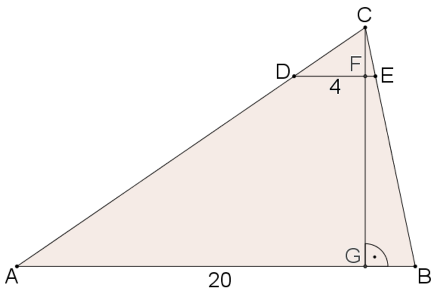
$$P_{ABDE} = 120$$

Sposób II

Z warunków zadania wynika, że odcinki AB i DE są równoległe, więc

$$|\sphericalangle EDC| = |\sphericalangle BAC| \text{ oraz } |\sphericalangle DEC| = |\sphericalangle ABC|.$$

Trójkąt ABC jest podobny do trójkąta DEC w skali $k = \frac{20}{4} = 5$. (cecha podobieństwa kąt, kąt, kąt)



Obliczamy wysokość CF trójkąta DEC.

$$P_{DEC} = \frac{1}{2} \cdot |DE| \cdot |FC|$$

$$5 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot |FC|$$

$$|FC| = \frac{5}{2}$$

Obliczamy wysokość CG trójkąta ABC.

$$\frac{|GC|}{|FC|} = 5$$

$$\frac{|GC|}{\frac{5}{2}} = 5$$

$$|GC| = 12{,}5$$

Obliczamy wysokość trapezu $ABED$.

$$|FG| = |GC| - |FC|$$

$$|FG| = 12{,}5 - 2{,}5$$

$$|FG| = 10$$

Obliczamy pole trapezu $ABDE$.

$$P_{ABDE} = \frac{1}{2}(|AB| + |ED|) \cdot |FG|$$

$$P_{ABDE} = \frac{1}{2}(20 + 4) \cdot 10$$

$$P_{ABDE} = 120$$

Zadanie 27. (0-2)

Dany jest trójkąt ABC, w którym $|AB| = 29$, $|AC| = 26$ oraz sinus kąta ostrego BAC jest równy $\frac{5}{13}$.

Oblicz długość boku BC.

Zasady oceniania

2 pkt – obliczenie długości boku $|BC| = 5\sqrt{5}$

1 pkt – obliczenie długości wysokości $|DC| = 10$

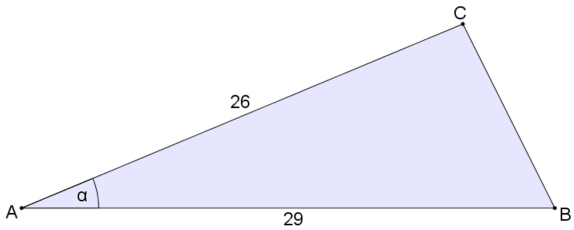
ALBO

obliczenie $cos\alpha = \frac{12}{13}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę albo brak rozwiązania.

Przykładowe rozwiązania

Sposób I



Z warunków zadania mamy: $|AB| = 29$, $|AC| = 26$. Oznaczmy przez α miarą kąta BAC.

Wtedy $sin\alpha = \frac{5}{13}$.

Aby obliczyć długość odcinka $|BC|$ zastosujemy twierdzenie cosinusów

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot cos\alpha$$

Korzystając z tożsamości $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ obliczymy cosinus kąta α.

$$\left(\frac{5}{13}\right)^2 + cos^2\alpha = 1$$

$$cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2$$

$$cos^2\alpha = \frac{144}{169}$$

$$cos\alpha = \frac{12}{13} \text{ lub } cos\alpha = -\frac{12}{13}$$

Kąt α jest kątem ostrym więc

$$cos\alpha = \frac{12}{13}$$

Zatem

$$|BC|^2 = 29^2 + 26^2 - 2 \cdot 29 \cdot 26 \cdot \frac{12}{13}$$

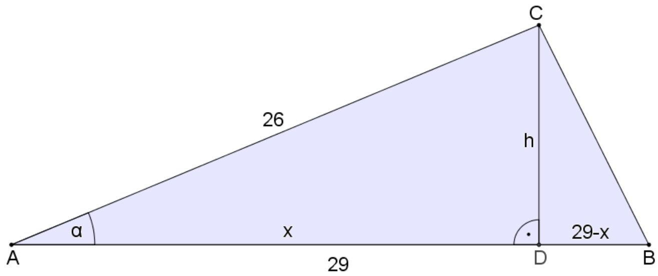
$$|BC|^2 = 29^2 + 26^2 - 2 \cdot 29 \cdot 26 \cdot \frac{12}{13}$$

$$|BC|^2 = 125$$

$$|BC| = 5\sqrt{5}$$

Sposób II

Przyjmijmy dane jak na rysunku: $|AB| = 29$, $|AC| = 26$, $|AD| = x$, $|CD| = h$ oraz $|DB| = 29 - x$. Oznaczmy przez α miarą kąta BAC.



Z warunków zadania mamy, że $sin\alpha = \frac{5}{13}$, zatem

$$\frac{h}{26} = \frac{5}{13}$$

$$h = 10$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego ADC mamy

$$|AD|^2 + |DC|^2 = |AC|^2$$

$$x^2 + 10^2 = 26^2$$

$$x^2 = 576$$

$$x = 24$$

Zatem

$$|DB| = 29 - x = 5$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego DBC mamy

$$|BC|^2 = |DB|^2 + |DC|^2$$

$$|BC|^2 = 5^2 + 10^2$$

$$|BC|^2 = 125$$

$$|BC| = 5\sqrt{5}$$

Zadanie 28. (0-3)

Wysokość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa 8 a pole jego podstawy wynosi $27\sqrt{3}$.

Oblicz długość krawędzi bocznej tego ostrosłupa.

Zasady oceniania

3 pkt – obliczenie długości krawędzi bocznej $b = 10$.

2pkt – obliczenie promienia okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa $R = 6$ oraz poprawne zastosowanie twierdzenia Pitagorasa do obliczenia długości krawędzi bocznej

1 pkt – obliczenie długości krawędzi podstawy ostrosłupa $a = 6\sqrt{3}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe rozwiązanie

Obliczamy długość krawędzi podstawy ostrosłupa.

Pole podstawy (trójkąt równoboczny o boku a) jest równe $27\sqrt{3}$, zatem

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 27\sqrt{3}$$

$$a^2 = 108$$

$$a = \sqrt{108} = \sqrt{36 \cdot 3}$$

$$a = 6\sqrt{3}$$

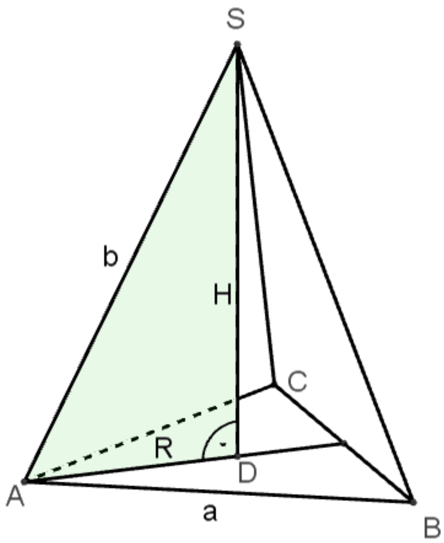
Obliczamy promień okręgu opisanego na podstawie.

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$R = \frac{6\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{3}$$

$$R = 6$$

Oznaczmy przez A, B, C, S wierzchołki ostrosłupa, przez D – spodek wysokości H opuszczonej z wierzchołka S na podstawę ABC (patrz rysunek). Stosujemy do trójkąta ADS twierdzenie Pitagorasa i otrzymujemy kolejno



$$|AD|^2 + |DS|^2 = |AS|^2$$

$$R^2 + H^2 = b^2$$

$$6^2 + 8^2 = b^2$$

$$b^2 = 100$$

$$b = 10$$

Odpowiedź: Krawędź boczna ostrosłupa ma długość 10.

Zadanie 29. (0-4)

Podstawą graniastosłupa prostego jest prostokąt, w którym stosunek długości jego boków jest równy $1:2$. Suma długości trzech krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka jest równa 14. **Wyznacz wymiary graniastosłupa, którego pole powierzchni całkowitej jest największe.**

Zasady oceniania

4 pkt – poprawna metoda obliczenia wymiarów prostopadłościanu oraz podanie poprawnych wyników: $|AB| = 6$, $|BC| = 3$, $|BF| = 5$.

3 pkt – poprawne zapisanie wzoru na pole powierzchni prostopadłościanu w zależności od zmiennej x oraz podanie dziedziny funkcji $x \in \left(0: \frac{14}{3}\right)$ i prawidłowe obliczenie pierwszej współrzędnej wierzchołka paraboli: $x = 3$.

ALBO

poprawne zapisanie wzoru na pole powierzchni prostopadłościanu w zależności od zmiennej y oraz podanie dziedziny funkcji $y \in (0: 14)$ i prawidłowe obliczenie pierwszej współrzędnej wierzchołka paraboli: $y = 5$.

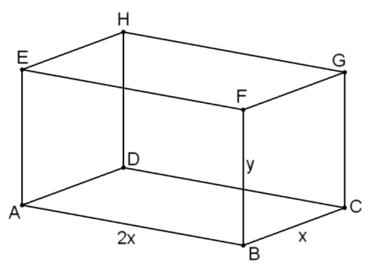
2 pkt – poprawne zapisanie wzoru na pole powierzchni graniastosłupa w zależności od jednej zmiennej, np.: $P(x) = 4x^2 + 6x(14 - 3x\ )$ lub $P(y) = 4\left(\frac{14-y}{3}\right)^2 + 6y\left(\frac{14-y}{3}\right)$

1 pkt – zapisanie związku między wymiarami prostopadłościanu: $y + 3x = 14$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku: $|AB| = 2x$, $|BC| = x$, $|BF| = y$.



Suma długości trzech krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka jest równa 14, więc

$$y + 3x = 14$$

Stąd wyznaczamy y: $y = 14 - 3x$.

Z warunków zadania wynika, że $x > 0$, $3x < 14$, $y > 0$ oraz $y < 14$, a zatem

$$x \in \left(0: \frac{14}{3}\right) \text{ oraz } y \in (0: 14)$$

Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa, w którym krawędzie wychodzące z jednego wierzchołka mają długości: x, $2x$ oraz y możemy zapisać

$$P = 2 \cdot x \cdot 2x + 2 \cdot x \cdot y + 2 \cdot 2x \cdot y$$

$$P = 4x^2 + 6xy$$

Pole powierzchni całkowitej wyrażamy jako funkcję jednej zmiennej x. W tym celu podstawiamy

$y = 14 - 3x$ i otrzymujemy

$$P(x) = 4x^2 + 6x(14 - 3x)$$

$$P(x) = -14x^2 + 84x$$

Zmienna x może przyjmować wartości z przedziału $\left(0: \frac{14}{3}\right)$.

Wykresem funkcji P jest fragment paraboli z ramionami skierowanymi do dołu. Obliczamy pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli:

$$p = \frac{-84}{2 \cdot (-14)} = 3 \in \left(0: \frac{14}{3}\right)$$

Zatem funkcja P przyjmuje wartość największą dla argumentu $x = 3$.

Obliczamy pozostałe długości krawędzi graniastosłupa, dla których pole powierzchni całkowitej jest największe.

$$2x = 2 \cdot 3 = 6$$

$$y = 14 - 3 \cdot 3 = 5$$

Poe powierzchni całkowitej graniastosłupa jest największe jeśli: $|AB| = 6$, $|BC| = 3$, $|BF| = 5$.