PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY

W ROKU SZKOLNYM 2024-2025

SODMiDN

KIELCE

MATEMATYKA

POZIOM PODSTAWOWY

ZASADY OCENIANIA ZADAŃ

KIELCE – MARZEC 2025

KLUCZ ODPOWIEDZI DO ZADAŃ ZAMKNIĘTYCH

Nr zadania	1	2	3	5	6	7	9 (2 odp)	10
ODP	D	A	C	D	C	D	D F	B

Nr zadania	12.1	12.2	12.3	14.1	14.2	16	17	18
OPD	FP	A	D	FP	D	B	D	C

Nr zadania	19	20	22	23	24	25	26.1	26.2
ODP	A.1.	C	PF	FP	B	D	A	C

Zasady oceniania zadania 9
2 pkt – wybranie dwóch poprawnych odpowiedzi
1 pkt – wybranie jednej lub dwóch odpowiedzi, z których jedna jest poprawna
0 pkt – odpowiedź całkowicie niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Schemat oceniania zadań otwartych

Zadanie 4. (0-2)

Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n, która przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1, liczba $n^2 - 2n + 4$ jest podzielna przez 3.

Zasady oceniania

2 pkt – przeprowadzenie pełnego dowodu: zapisanie liczby $\mathrm{n}^2 - 2\mathrm{n} + 4$ w postaci $3(3k^2 + 1)$ i stwierdzenie, że liczba $3k^2 + 1$ jest całkowita (naturalna)

ALBO

przeprowadzenie pełnego dowodu: zapisanie liczby $\mathrm{n}^2 - 2\mathrm{n} + 4$ w postaci $9k^2 + 3$ i stwierdzenie, że każdy składnik sumy dzieli się przez 3.

1 pkt – zapisanie, że liczba $\mathrm{n}^2-2\mathrm{n}+4=(3k+1)^2-2(3k+1)+4$,

gdzie $k\in\{0,1,2,3,4,\dots\}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:
Jeżeli zdający sprawdza poprawność tezy tylko dla wybranych wartości n, to otrzymuje 0 punktów za całe rozwiązanie.

Przykładowe rozwiązanie

Liczbę n można zapisać w postaci $n=3k+1$, gdzie $k\in\{0,1,2,3,4,\dots\}$, a zatem

$$\mathrm{n}^2-2\mathrm{n}+4=(3k+1)^2-2(3k+1)+4=9k^2+6k+1-6k-2+4=9k^2+3=$$
$$=3(3k^2+1)$$

Liczbę $\mathrm{n}^2-2\mathrm{n}+4$ zapisaliśmy jako iloczyn liczby 3 oraz liczby $3k^2+1$. Dlatego, aby udowodnić podzielność przez 3, wystarczy wykazać, że drugi czynnik w rozkładzie jest liczbą naturalną.

Ponieważ $k\in\{0,1,2,3,4,\dots\}$, to liczba $3k^2$ jest liczbą naturalną. Suma liczby naturalnej i liczby 1 jest liczbą naturalną. To kończy dowód.

Zadanie 8. (0-3)

A B C D

Rozwiąż równanie

$$\frac{2x-1}{2-x}=\frac{x+3}{3x-6}$$

Zapisz konieczne założenie i obliczenia.

Zasady oceniania

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody oraz zapisanie założenia $x\neq 2$, oraz poprawny wynik $x=0$.

2 pkt – przekształcenie równania $\frac{2x-1}{2-x}=\frac{x+3}{3x-6}$ do równania liniowego, np.

$-3(2x-1)=x+3$ oraz rozwiązanie tego równania: $x=0$,

ALBO

– przekształcenie równania $\frac{2x-1}{2-x}=\frac{x+3}{3x-6}$ do równania kwadratowego, np.

$(2x-1)(3x-6)=(2-x)(x+3)$, oraz rozwiązanie tego równania:

$x = 0$ lub $x = 2$,

ALBO

– przekształcenie równania $\frac{2x-1}{2-x} = \frac{x+3}{3x-6}$ do równania liniowego, np.

$-3(2x-1) = x + 3$ oraz zapisanie założenia: $x \neq 2$,

ALBO

– przekształcenie równania $\frac{2x-1}{2-x} = \frac{x+3}{3x-6}$ do równania kwadratowego, np.

$(2x-1)(3x-6) = (2-x)(x+3)$, oraz zapisanie założenia: $x \neq 2$.

1 pkt – przekształcenie równania $\frac{2x-1}{2-x} = \frac{x+3}{3x-6}$ do równania liniowego, np.

$-3(2x-1) = x + 3$,

ALBO

– przekształcenie równania $\frac{2x-1}{2-x} = \frac{x+3}{3x-6}$ do równania kwadratowego, np.

$(2x-1)(3x-6) = (2-x)(x+3)$,

ALBO

– zapisanie założenia: $x \neq 2$,

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Każde z wyrażeń: $\frac{2x-1}{2-x}$, $\frac{x+3}{3x-6}$ ma sens liczbowy dla $x \neq 2$.

Przekształcamy równanie równoważnie:

$$\frac{2x-1}{2-x} = \frac{x+3}{3x-6} \quad / \cdot 3(x-2), \text{ gdzie } x \neq 2$$

$$-3(2x-1) = x + 3$$

$$-6x + 3 = x + 3$$

$$-7x = 0$$

$$x = 0$$

Rozwiązaniem równania jest liczba $x = 0$.

Sposób II

Każde z wyrażeń: $\frac{2x-1}{2-x}$, $\frac{x+3}{3x-6}$ ma sens liczbowy dla $x \neq 2$.

Przekształcamy równanie równoważnie:

$$\frac{2x-1}{2-x} = \frac{x+3}{3x-6}$$

$$(2x-1)(3x-6) = (2-x)(x+3),\ \text{gdzie } x \neq 2$$

$$6x^2 - 12x - 3x + 6 = 2x + 6 - x^2 - 3x$$

$$7x^2 - 14x = 0$$

$$4x(x-2) = 0$$

$$x = 0 \text{ lub } x = 2$$

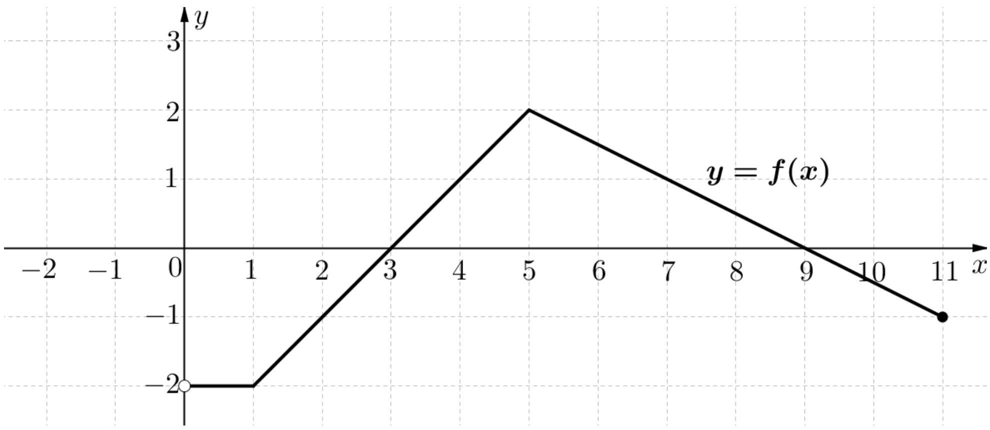
Wobec założenia $x \neq 2$ jedynym rozwiązaniem równania jest liczba $x = 0$.

Zadanie 11. (0-2)

Funkcja f jest określona następująco:

$$f(x) = \begin{cases} -2 & dla\ x \in (0, 1) \\ x - 3 & dla\ x \in [1, 5) \\ -0{,}5x + 4{,}5 & dla\ x \in [5, 11] \end{cases}$$

Wykres funkcji f przedstawiono w układzie współrzędnych (x, y) na rysunku poniżej.



Uzupełnij zdania. Wpisz odpowiednie przedziały w wykropkowanych miejscach, aby zdania były prawdziwe.

1. Zbiorem wartości funkcji f jest przedział …… $[\mathbf{-2, 2}]$ ……. .

2. Zbiorem wszystkich liczb m, dla których równanie $f(x) = m$ ma dokładnie dwa rozwiązania jest przedział … $[\mathbf{-1, 2})$ … .

Zadanie 13. (0-2)

Rozwiąż nierówność

$$x - 3 \geq 4x^2 - 12x$$

Zapisz obliczenia.

Zasady oceniania

2pkt – spełnienie warunku określonego w zasadach oceniania za 1 pkt oraz zapisanie zbioru rozwiązań nierówności $x \epsilon \left[\frac{1}{4}, 3\right]$

ALBO

– spełnienie warunku określonego w zasadach oceniania za 1 pkt oraz przedstawienie zbioru rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów.

1 pkt – obliczenie lub podanie pierwiastków trójmianu kwadratowego $-4x^2 + 13x - 3$: $x_1 = 3, x_2 = \frac{1}{4}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający, obliczając pierwiastki trójmianu $-4\mathrm{x}^2 + 13\mathrm{x} - 3$, popełni błędy (ale otrzyma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do popełnionych błędów zapisze zbiór rozwiązań nierówności, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający wyznacza pierwiastki trójmianu kwadratowego w przypadku, gdy błędnie obliczony przez zdającego wyróżnik Δ jest ujemny, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
3. Jeżeli zdający rozpatruje inny niż podany w zadaniu trójmian kwadratowy, który nie wynika z błędu przekształcenia, i w konsekwencji rozpatruje inną nierówność, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
4. Akceptowane jest zapisanie pierwiastków trójmianu w postaci $a + b\sqrt{c}$, gdzie a, b, c są liczbami wymiernymi.
5. Jeżeli zdający poda zbiór rozwiązań w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów i jednocześnie zapisze niewłaściwy przedział jako zbiór rozwiązań, np.:$x \epsilon \left(\frac{1}{4}, 3\right)$, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.

Przykładowe rozwiązanie

Zapisujemy nierówność w postaci $-4x^2 + 13x - 3 \geq 0$ i obliczamy miejsca zerowe funkcji $y = -4x^2 + 13x - 3$.

Obliczamy wyróżnik trójmianu $= -4x^2 + 13x - 3$.

$$\Delta = 13^2 - 4 \cdot (-4) \cdot (-3) = 169 - 48 = 121$$

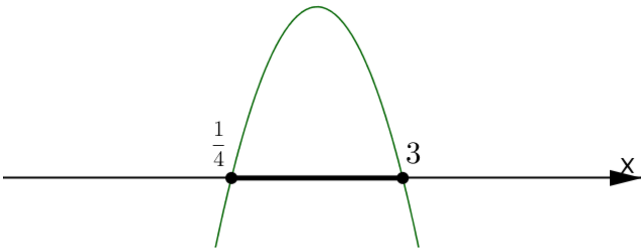
Stąd

$$x_1 = \frac{-13 - \sqrt{121}}{2 \cdot (-4)} = 3$$

$$x_2 = \frac{-13 + \sqrt{121}}{2 \cdot (-4)} = \frac{1}{4}$$

Szkicujemy wykres funkcji $y = -4x^2 + 13x - 3$

Odczytujemy argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości nieujemne.



Zbiorem rozwiązań nierówności jest przedział $\left[\frac{1}{4}, 3\right]$.

Zadanie 15. (0-3)

Wykres funkcji kwadratowej f przecina oś Oy w punkcie $A = (0, -4)$. Punkt $B = (2, 0)$ jest jedynym punktem wspólnym tego wykresu z osią Ox. Wzór funkcji f możemy zapisać w postaci ogólnej $f(x) = ax^2 + bx + c$. Oblicz wartości a, b i c.

Zapisz obliczenia

Zasady oceniania *(sposobu I)*

3pkt – zapisanie wartości wszystkich współczynników: $a = -1$, $b = 4$, $c = -4$.

2pkt – wyznaczenie współczynnika a: $a = -1$

1 pkt – zapisanie wzoru funkcji f w postaci $f(x) = a(x - 2)^2$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania *(sposobu II)*

3pkt – zapisanie wartości wszystkich współczynników: $a = -1$, $b = 4$, $c = -4$.

2pkt – wyznaczenie współczynnika $c = -4$ oraz zapisanie układu dwóch równań, z których można wyznaczyć wartości współczynników a oraz b,

np.: $\frac{-b}{2a} = 2$ oraz $\frac{-b^2-16a}{4a} = 0$.

1 pkt – obliczenie współczynnika $c = -4$

ALBO

- zapisanie **trzech** warunków wynikających z treści zadania

np.: $f(0) = -4$, $\frac{-b}{2a} = 2$, $\Delta = 0$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe rozwiązanie

sposób I

Z faktu, że wykres jest styczny do osi Ox w punkcie $B = (2, 0)$

Wynika, że punkt ten jest wierzchołkiem paraboli. Wzór funkcji f możemy zapisać w postaci

$$f(x) = a(x-2)^2$$

Punkt $(0, -4)$ należy do wykresu funkcji, więc

$$-4 = a(0-2)^2$$

$$a = -1$$

Zatem postać kanoniczna wzoru funkcji f, to

$$f(x) = -(x-2)^2$$

Przekształcamy wzór funkcji f do postaci ogólnej $f(x) = -x^2 + 4x - 4$

Ostatecznie: $a = -1$, $b = 4$, $c = -4$.

sposób II

Funkcję f możemy zapisać w postaci ogólnej $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$.

Z treści zadania wynika, że $f(0) = -4$, $\frac{-b}{2a} = 2$ oraz $\Delta = 0$.

$$f(0) = -4, \text{ więc } c = -4$$

$$b = -4a$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 16a^2 + 16a$$

$$16a^2 + 16a = 0$$

$$a = 0 \text{ lub } a = -1$$

Uwzględniając założenie $a \neq 0$ otrzymujemy

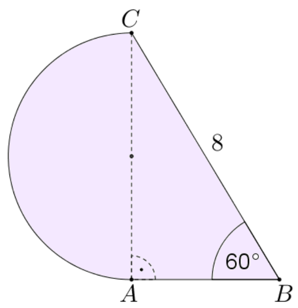
$$a = -1$$

$$b = -4a = -4$$

Ostatecznie: $a = -1$, $b = 4$, $c = -4$.

Zadanie 21. (0-3)

Figura f składa się z trójkąta prostokątnego ABC oraz półkola, którego średnicą jest przyprostokątna AC. Długość przeciwprostokątnej BC jest równa 8, a miara kąta ostrego ABC jest równa 60^0. (zobacz rysunek)



Oblicz obwód figury f. Zapisz obliczenia.

Przykładowe rozwiązanie

Korzystając z funkcji trygonometrycznych kąta ABC obliczamy długości przyprostokątnych AB oraz AC.

$$sin60^0 = \frac{|AC|}{|BC|}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{|AC|}{8}$$

$$|AC| = 4\sqrt{3}$$

$$cos60^0 = \frac{|AB|}{|BC|}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{|AB|}{8}$$

$$|AB| = 4$$

Odcinek AC jest średnicą koła, więc promień ma długość $2\sqrt{3}$.

Obliczamy długość łuku $\widehat{AC}$

$$\left|\widehat{AC}\right| = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 2\sqrt{3}$$

$$\left|\widehat{AC}\right| = 2\sqrt{3}\pi$$

Obwód L figury f jest równy

$$L = \left|\widehat{AC}\right| + |AB| + |BC|$$

$$L = 2\sqrt{3}\pi + 12$$

Zasady oceniania

3pkt – poprawna metoda obliczenia obwodu $L = 2\sqrt{3}\pi + 12$

2pkt – obliczenie długości przyprostokątnych $|AC| = 4\sqrt{3}$ oraz $|AB| = 4$

ALBO

– obliczenie długości łuku $\left|\widehat{AC}\right| = 2\sqrt{3}\pi$

1 pkt – obliczenie długości przyprostokątnej $|AC| = 4\sqrt{3}$

ALBO

– obliczenie długości przyprostokątnej $|AB| = 4$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 27. (0-2)

Ze zbioru wszystkich naturalnych liczb trzycyfrowych o różnych cyfrach, w których każda cyfra jest większa od trzech, wylosowano jedną liczbę.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na wylosowaniu liczby, której suma cyfr jest większa od 23. Zapisz obliczenia.

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody obliczenia prawdopodobieństwa zdarzenia A i uzyskanie poprawnego wyniku: $P(A) = \frac{1}{20}$.

1 pkt – obliczenie liczby zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 6 \cdot 5 \cdot 4$

ALBO

– wypisanie wszystkich liczb sprzyjających zdarzeniu A

$$\{789, 798, 879, 897, 987, 978\}$$

ALBO

– zapisanie, że jest 6 wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe rozwiązanie

Cyfry większe od 3, to: $4, 5, 6, 7, 8, 9$.
Obliczamy ilość wszystkich liczb trzycyfrowych o różnych cyfrach, większych od 3.

$$|\Omega| = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120.$$

Wyznaczmy zdarzenie A:

$$A = \{789, 798, 879, 897, 987, 978\}$$

Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A jest równa $|A| = 6$.

Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest więc równe

$$P(A) = \frac{6}{120} = \frac{1}{20}$$

Zadanie 28. (0-4)

Pole podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równe 18, a jego objętość 24. Oblicz długość krawędzi bocznej tego ostrosłupa.

Zapisz obliczenia.

Zasady oceniania

4 pkt – obliczenie długości krawędzi bocznej $b = 5$.

3 pkt – obliczenie $a = 3\sqrt{2}$ – długości krawędzi podstawy oraz wysokości ostrosłupa $h = 4$ oraz zapisanie związku pozwalającego na obliczenie krawędzi bocznej, np.: $b^2 = h^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$

ALBO

– obliczenie długości wysokości ściany bocznej $h_1 = \frac{\sqrt{82}}{2}$

2pkt – obliczenie wysokości ostrosłupa: $h = 9$ oraz długości krawędzi podstawy $a = 3\sqrt{2}$
ALBO
– obliczenie długości przekątnej podstawy ostrosłupa: $|AC| = 6$

1 pkt – obliczenie długości krawędzi podstawy $a = 3\sqrt{2}$
ALBO
– obliczenie długości wysokości ostrosłupa $h = 9$

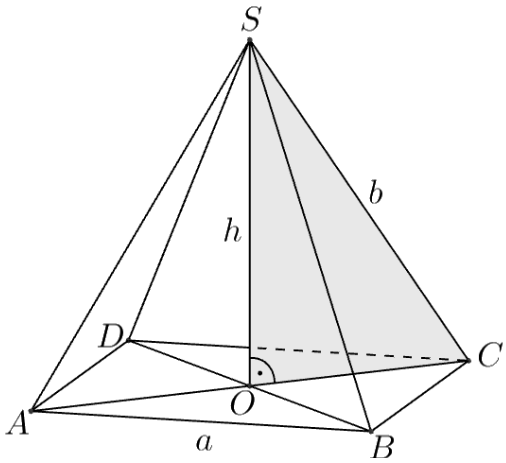
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga

Jeżeli zdający zastosuje nieprawidłowy wzór $V = P_p \cdot H$ na objętości ostrosłupa (zapominając o $\frac{1}{3}$), to za całe rozwiązanie może uzyskać maksymalnie **3 pkt**.

Przykładowe rozwiązanie

Sposób I
Wprowadźmy oznaczenia tak jak na rysunku: $|AB| = a$, $|OS| = h$, $|SC| = b$.



Stosując wzór $V = \frac{1}{3} P_p \cdot h$ na objętość ostrosłupa otrzymujemy

$$24 = \frac{1}{3} \cdot 18 \cdot h$$

$$h = 4$$

Stosując wzór na pole podstawy $ABCD$ otrzymujemy

$$\mathrm{a}^2 = 18$$

$$a = \sqrt{18}$$

$$a = 3\sqrt{2}$$

Podstawą ostrosłupa jest kwadrat, którego przekątna ma długość $|AC| = a\sqrt{2}$, więc

$$|AC| = 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$$

$$|AC| = 6$$

Odcinek OC ma długość 3, więc stosując twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta SOC otrzymujemy

$$b^2 = 3^2 + 4^2$$

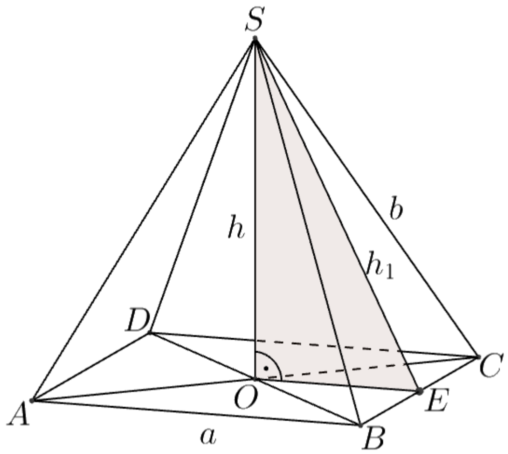
$$b^2 = 9 + 16$$

$$b^2 = 25$$

$$b = 5$$

Sposób II

Wprowadźmy oznaczenia tak jak na rysunku: $|AB| = a,\ |OS| = h$, $|SC| = b$, wysokość ściany bocznej $|SE| = h_1$.



Stosując wzór $V = \frac{1}{3}P_p \cdot h$ na objętość ostrosłupa otrzymujemy

$$24 = \frac{1}{3} \cdot 18 \cdot h$$

$$h = 4$$

Stosując wzór na pole podstawy $ABCD$ otrzymujemy

$$\mathrm{a}^2 = 18$$

$$a = \sqrt{18}$$

$$a = 3\sqrt{2}$$

Odcinek OE ma długość $\frac{3\sqrt{2}}{2}$, więc stosując twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta EOS otrzymujemy

$$h_1{}^2 = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 4^2$$

$$h_1{}^2 = \frac{18}{4} + 16$$

$$h_1{}^2 = \frac{82}{4}$$

$$h_1 = \frac{\sqrt{82}}{2}$$

Odcinek EC ma długość $\frac{3\sqrt{2}}{2}$, więc stosując twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta ECS otrzymujemy

$$b^2 = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{82}}{2}\right)^2$$

$$b^2 = \frac{18}{4} + \frac{82}{4}$$

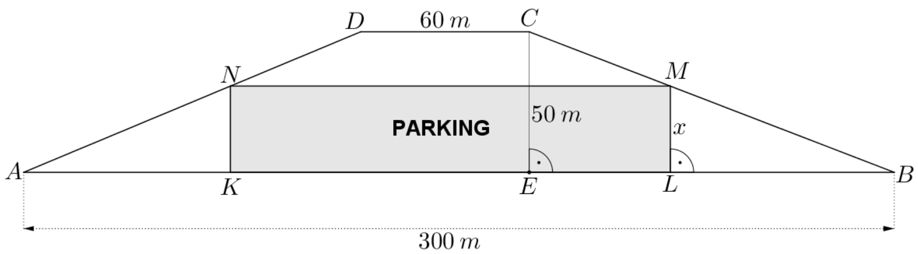
$$b^2 = 25$$

$$b = 5$$

Zadanie 29. (0-4)

Pan Alan dysponuje działką w kształcie trapezu równoramiennego $ABCD$, którego podstawy mają długości $|AB| = 300$ metrów oraz $|CD| = 60$ metrów, a wysokość $|CE| = 50$ metrów. Z tej działki musi wydzielić plac pod parking w kształcie prostokąta $KLMN$ tak, aby bok KL prostokąta zawierał się w podstawie AB tego trapezu, a wierzchołki M oraz N leżały na jego ramionach – odpowiednio BC oraz AD. Bok MN nie jest zawarty w podstawie CD tego trapezu (zobacz rysunek).

Niech $P(x)$ oznacza pole parkingu w zależności od długości x odcinka LM.



Wyznacz wzór i dziedzinę funkcji P. Oblicz długość x boku LM tego z rozważanych prostokątów, którego pole jest największe.

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawne wyniki, np.:
$P(x) = x(300 - 4{,}8x),\ D = (0, 50),\ x = 31\frac{1}{4}$.

3 pkt – zapisanie poprawnego wzoru na pole prostokąta $KLMN$ w zależności od zmiennej x oraz zapisanie dziedziny D tej funkcji, np. $P(x) = x(300 - 4{,}8x),\ D = (0, 50)$,

ALBO

– zapisanie poprawnego wzoru na pole prostokąta $KLMN$ w zależności od zmiennej x (bez zapisanej dziedziny funkcji P) oraz prawidłowe obliczenie pierwszej współrzędnej wierzchołka wykresu funkcji P, np. $P(x) = x(300 - 4{,}8x)$ oraz $x = 31\frac{1}{4}$,

ALBO

– zapisanie poprawnego wzoru na pole prostokąta $KLMN$ w zależności od zmiennej x (bez zapisanej dziedziny funkcji P) oraz prawidłowe obliczenie pochodnej funkcji P, np. $P'(x) = -9{,}6x + 300$ oraz obliczenie miejsca zerowego pochodnej: $x = 31\frac{1}{4}$.

2 pkt – zapisanie poprawnego wzoru na pole prostokąta $KLMN$ w zależności od zmiennej x (bez zapisania dziedziny funkcji P), np. $P(x) = x(300 - 4{,}8x)$

ALBO

– zapisanie zależności między długościami boków LM i LB, np.: $y = 2{,}4x$ oraz zapisanie zakresu zmienności x: $x \in (0, 50)$.

1 pkt – zapisanie zależności między długościami boków LM i LB, np.: $y = 2{,}4x$

ALBO

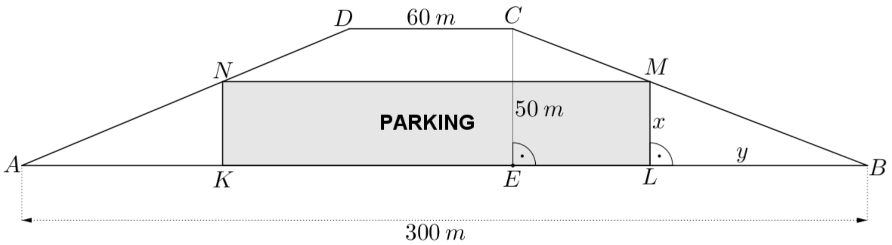
– zapisanie zakresu zmienności x: $x \in (0, 50)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe rozwiązania

Sposób I

Przyjmijmy oznaczenie, że $|LB| = y$.



$$|EB| = \frac{300 - 60}{2}$$

Długość odcinka EB jest równa 120 m.

Trójkąty CEB oraz MLB są podobne, więc

$$\frac{|LB|}{|LM|} = \frac{|EB|}{|EC|}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{120}{50}$$

$$y = 2{,}4x$$

Możemy zatem zapisać wzór na pole prostokątnego parkingu w zależności od x.

$$P(x) = x(300 - 4{,}8x)$$

$$P(x) = -4{,}8x^2 + 300x$$

Zmienna x może przyjmować wartości z przedziału $(0, 50)$

Wykresem funkcji P jest fragment paraboli skierowanej ramionami do dołu. Obliczamy pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli: $p = \frac{-300}{2\cdot(-4{,}8)} = 31\frac{1}{4} \in (0, 50)$.

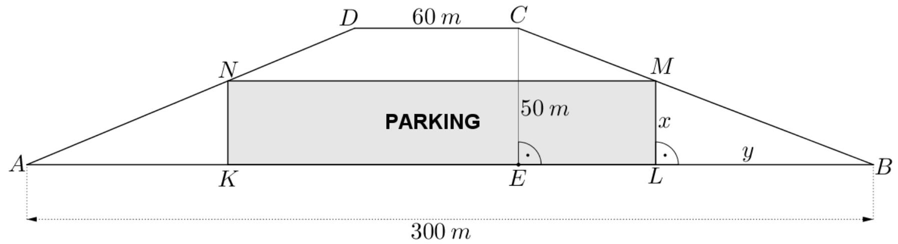
Zatem funkcja P przyjmuje wartość największą dla argumentu $31\frac{1}{4}$.

Pole parkingu jest największe, jeśli długość boku x jest równa $31\frac{1}{4}$ m.

Ostatecznie: $P(x) = x(300 - 4{,}8x),\ D = (0, 50),\ x = 31\frac{1}{4}$.

Sposób II

Przyjmijmy oznaczenie, że $|LB| = y$.



$$|EB| = \frac{300 - 60}{2}$$

Długość odcinka EB jest równa 120 m.

Trójkąty CEB oraz MLB są podobne, więc

$$\frac{|LB|}{|LM|} = \frac{|EB|}{|EC|}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{120}{50}$$

$$y = 2{,}4x$$

Możemy zatem zapisać wzór na pole prostokątnego parkingu w zależności od x.

$$P(x) = x(300 - 4{,}8x)$$

$$P(x) = -4{,}8x^2 + 300x$$

Zmienna x może przyjmować wartości z przedziału $(0, 50)$

Wyznaczamy pochodną funkcji P: $P'(x) = -9{,}6x + 300$ dla $x \in (0, 50)$.

Obliczamy miejsca zerowe pochodnej funkcji P.

$$P'(x) = 0$$

$$-9{,}6x + 300 = 0$$

$$x = 31\frac{1}{4} \in (0, 50)$$

Badamy znak pochodnej funkcji P.

$$P'(x) < 0$$

$$-9{,}6x + 300 < 0$$

$$x > 31\frac{1}{4} \text{ i } x \in (0, 50)$$

więc $P'(x) < 0$ dla $x \in \left(31\frac{1}{4}, 50\right)$.

$$P'(x) > 0$$

$$-9{,}6x + 300 > 0$$

$$x < 31\frac{1}{4} \text{ i } x \in (0, 50)$$

więc $P'(x) > 0$ dla $x \in \left(0, 31\frac{1}{4}\right)$.

Zatem funkcja P jest rosnąca w przedziale $\left(0,\ 31\frac{1}{4}\right]$ oraz malejąca w przedziale $\left[31\frac{1}{4}, 50\right)$.

Stąd dla $x = 31\frac{1}{4}$ funkcja P osiąga maksimum lokalne, które jest największą wartością funkcji P.

Pole parkingu jest największe, jeśli długość boku x jest równa $31\frac{1}{4}$ m.

Ostatecznie: $P(x) = x(300 - 4{,}8x),\ D = (0, 50),\ x = 31\frac{1}{4}$.