PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY

W ROKU SZKOLNYM 2023-2024

SODMiDN
KIELCE

MATEMATYKA

POZIOM PODSTAWOWY

ZASADY OCENIANIA ZADAŃ

KIELCE – MARZEC 2024

KLUCZ ODPOWIEDZI DO ZADAŃ ZAMKNIĘTYCH

Nr zadania	1	2	3	4	5 (2 pkt.)	6	8	9	10
ODP	B	D	C	A	B G	D	B1	A	B

Nr zadania	11	12.1	12.2	13	14	15	17.1	17.2	17.3
OPD	C	PF	A	A	D	A	PF	B	D

Nr zadania	18	19	20	21	22	23	24	25	27.1	27.2
ODP	A	C	D	D	B	A	B	A	D	C

Zasady oceniania zadania 5
2 pkt – wybranie dwóch poprawnych odpowiedzi
1 pkt – wybranie jednej lub dwóch odpowiedzi, z których jedna jest poprawna
0 pkt – odpowiedź całkowicie niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Schemat oceniania zadań otwartych

Zadanie 7. (0-2)

Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $(3n+2)^2-(n+2)^2$ jest podzielna przez 16.

Zasady oceniania

2 pkt – przekształcenie danego wyrażenia do postaci iloczynu $8n(n+1)$ oraz stwierdzenie, że liczba $n(n+1)$ jest liczbą naturalną parzystą lub przekształcenie danego wyrażenia do postaci iloczynu $8(n^2+n)$ oraz uzasadnienie, że liczba n^2+n jest liczbą naturalną parzystą

1 pkt – przekształcenie danego wyrażenia do postaci $8n(n+1)$ lub $8(n^2+n)$

ALBO

– przekształcenie danego wyrażenia do postaci $8n^2+8n$ i stwierdzenie, że ta suma jest podzielna przez 8.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:
Jeżeli zdający sprawdza poprawność tezy tylko dla wybranych wartości n, to otrzymuje 0 punktów za całe rozwiązanie.

Przykładowe rozwiązanie

Korzystając ze wzoru skróconego mnożenia, zapisujemy liczbę $(3n+2)^2-(n+2)^2$ w postaci

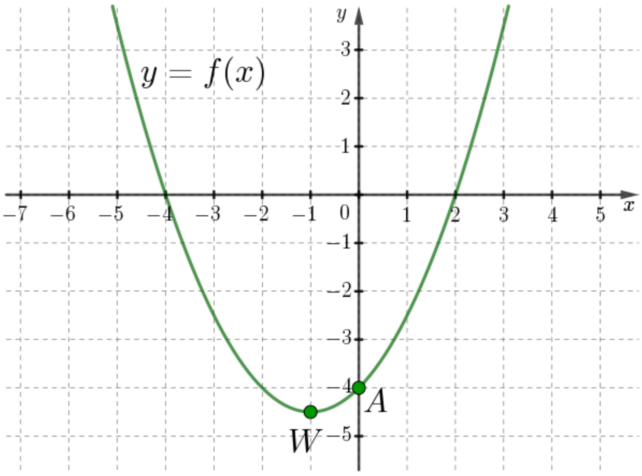
$$(3n+2)^2-(n+2)^2=9n^2+12n+4-n^2-4n-4=8n^2+8n=8n(n+1)$$

Ponieważ n oraz $n+1$ są kolejnymi liczbami naturalnymi, to jedna z nich jest liczbą parzystą, więc iloczyn $n(n+1)$ jest liczbą parzystą, a zatem iloczyn $8n(n+1)$ jest podzielny przez 16.

To należało wykazać.

Zadanie 12.

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x,y) przedstawiono fragment wykresu funkcji kwadratowej f. Wierzchołek W paraboli, która jest wykresem funkcji f, ma współrzędne $\left(-1,-4\frac{1}{2}\right)$. Parabola ta przecina oś Oy w punkcie $A=(0,-4)$.



Zadanie 12.3. (0-3)

Wzór funkcji f możemy zapisać w postaci ogólnej $f(x)=ax^2+bx+c$. Oblicz wartości współczynników a, b i c.

Zasady oceniania *(sposobu I)*

3pkt – zapisanie wartości wszystkich współczynników: $a=\frac{1}{2}$, $b=1$, $c=-4$.

2pkt – wyznaczenie współczynnika a: $a=\frac{1}{2}$

1 pkt – zapisanie wzoru funkcji f w postaci $f(x)=a(x+1)^2-4\frac{1}{2}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania *(sposobu II)*

3pkt – zapisanie wartości wszystkich współczynników: $a=\frac{1}{2}$, $b=1$, $c=-4$.

2pkt – wyznaczenie współczynnika $c=-4$ oraz zapisanie układu dwóch równań, z których można wyznaczyć wartości współczynników a oraz b, np.: $\frac{-b}{2a}=-1$ oraz $\frac{-b^2-16a}{4a}=-4\frac{1}{2}$.

1 pkt – zapisanie warunków wynikających z treści zadania

$$f(0) = -4, \quad \frac{-b}{2a} = -1 \quad \text{oraz} \quad \frac{-\Delta}{4a} = -4\frac{1}{2}.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe rozwiązanie

sposób I

Wzór funkcji f możemy zapisać w postaci kanonocznej

$$f(x) = a(x+1)^2 - 4\frac{1}{2}$$

Punkt $(0, -4)$ należy do wykresu funkcji, więc

$$-4 = a(0+1)^2 - 4\frac{1}{2}$$

$$a = \frac{1}{2}$$

Zatem postać kanoniczna wzoru funkcji f, to

$$f(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 - 4\frac{1}{2}$$

Przekształcamy wzór funkcji f do postaci ogólnej $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$

Ostatecznie: $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$, $c = -4$.

sposób II

Funkcję f możemy zapisać w postaci ogólnej $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0.$

Z treści zadania wynika, że $f(0) = -4$, $\frac{-b}{2a} = -1$ oraz $\frac{-\Delta}{4a} = -4\frac{1}{2}$.

$$f(0) = -4, \text{ więc } c = -4$$

$$b = 2a$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 4a^2 + 16a$$

$$\frac{\Delta}{4a} = 4\frac{1}{2}$$

$$\frac{4a^2 + 16a}{4a} = 4\frac{1}{2}$$

$$a + 4 = 4\frac{1}{2}$$

$$a = \frac{1}{2}$$

$$b = 2a = 1$$

Ostatecznie: $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$, $c = -4$.

Zadanie 16. (0-3)

Rozwiąż równanie

$$x^3 - 3x = 4x^2 - 12$$

Zasady oceniania

3pkt – poprawna metoda rozwiązania równania i obliczenie wszystkich rozwiązań równania: $-\sqrt{3},\ \sqrt{3}\,,\ 4$.

2pkt – przekształcenie równania $x^3 - 3x = 4x^2 - 12$ do postaci $(x-4)(x^2-3)=0$ oraz rozwiązanie jednego z równań wynikających z tego rozkładu, np.:

$(x-4)(x^2-3)=0$ i $x=4$

lub

$(x-4)(x^2-3)=0$ i $x=\sqrt{3}$ oraz $x=-\sqrt{3}$

ALBO

– rozłożenie wielomianu $W(x) = x^3 - 3x = 4x^2 - 12$ na czynniki liniowe:

$W(x) = (x-4)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$

ALBO

– sprawdzenie, że liczba 4 jest pierwiastkiem wielomianu W oraz poprawne podzielenie wielomianu W przez dwumian $x-4$:

$(x^3 - 4x^2 - 3x + 12) : (x-4) = x^2 - 3$.

1 pkt – przekształcenie równania $x^3 - 3x = 4x^2 - 12$ tak, aby zapisać go postaci

$(x-4)(x^2-3)=0$

ALBO

– przekształcenie równania $x^3 - 3x = 4x^2 - 12$ do postaci alternatywy równań, np.

$x^2 - 3 = 0$ lub $x - 4 = 0$

ALBO

– sprawdzenie, że liczba 4 jest jednym z rozwiązań równania

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe rozwiązania

Sposób I

Przekształcamy równanie równoważnie, stosując metodę grupowania wyrazów

$$x^3 - 3x - 4x^2 + 12 = 0$$

$$x(x^2-3) - 4(x^2-3) = 0$$

$$(x-4)(x^2-3) = 0$$

$$(x-4)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0$$

$$x-4=0 \text{ lub } x-\sqrt{3}=0 \text{ lub } x+\sqrt{3}=0$$

$$x=4 \text{ lub } x=\sqrt{3} \text{ lub } x=-\sqrt{3}$$

Rozwiązaniami równania są liczby: $-\sqrt{3},\ \sqrt{3}\,,\ 4$.

Sposób II

Przekształcamy równanie równoważnie, stosując metodę grupowania wyrazów

$$x^3-4x^2-3x+12=0$$

$$x^2(x-4)-3(x-4)=0$$

$$(x-4)(x^2-3)=0$$

$$(x-4)\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)=0$$

$$x-4=0 \text{ lub } x-\sqrt{3}=0 \text{ lub } x+\sqrt{3}=0$$

$$x=4 \text{ lub } x=\sqrt{3} \text{ lub } x=-\sqrt{3}$$

Rozwiązaniami równania są liczby: $-\sqrt{3},\ \sqrt{3}\ ,\ 4.$

Sposób III

Obliczamy $W(4)=0$ i stwierdzamy, że liczba 4 jest pierwiastkiem wielomianu

$$W(x)=x^3-4x^2-3x+12$$

Zatem wielomian W jest podzielny przez dwumian $x-4$. Dzielimy wielomian W przez dwumian $x-4$ i otrzymujemy $(x^3-4x^2-3x+12):(x-4)=x^2-3$.

Zatem $W(x)=(x-4)(x^2-3)$

Pierwiastkami dwumianu x^2-3 są liczby $-\sqrt{3}$ oraz $\sqrt{3}$.

Rozwiązaniami równania są liczby: $-\sqrt{3},\ \sqrt{3}\ ,\ 4.$

Zadanie 26. (0-3)

Rozważmy wszystkie czterowyrazowe ciągi arytmetyczne o różnicy $r=2$. Wyznacz wyrazy tego z rozważanych ciągów, którego suma kwadratów wszystkich czterech wyrazów jest najmniejsza.

Zasady oceniania *Sposobu I*

3pkt – poprawna metoda obliczenia wyrazów ciągu spełniającego warunki zadania: $-3,-1,\ 1,\ 3.$

2pkt – poprawne zapisanie wzoru funkcji $f(x)=4x^2+24x+56$ oraz obliczenie argumentu x, dla którego wartość funkcji jest najmniejsza: $x=-3$

1 pkt – wyznaczenie funkcji $f(x)=x^2+(x+2)^2+(x+4)^2+(x+6)^2$ określonej dla każdej liczby rzeczywistej x.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania *Sposobu II*

3pkt – poprawna metoda obliczenia wyrazów ciągu spełniającego warunki zadania: $-3,-1,\ 1,\ 3.$

2pkt – zapisanie wyrażenia $(x-3)^2+(x-1)^2+(x+1)^2+(x+3)^2$ w postaci $4x^2+20$ oraz stwierdzenie, że suma ta jest najmniejsza, gdy $x=0$.

1 pkt – zapisanie wyrażenia będącego sumą kwadratów czterech początkowych wyrazów ciągu, np.: $(x-3)^2+(x-1)^2+(x+1)^2+(x+3)^2$ określonego dla każdej liczby rzeczywistej x.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe rozwiązania

Sposób I

Oznaczamy przez x pierwszy wyraz ciągu. Wtedy drugi, trzeci i czwarty wyraz tego ciągu są równe odpowiednio: $x+2$, $x+4$, $x+6$.
Suma kwadratów wszystkich czterech wyrazów tego ciagu jest więc równa

$$x^2+(x+2)^2+(x+4)^2+(x+6)^2$$

Rozważmy funkcję f określoną dla każdej liczby rzeczywistej x wzorem

$$f(x)=x^2+(x+2)^2+(x+4)^2+(x+6)^2$$

Funkcja f jest kwadratowa, a jej wzór możemy zapisać w postaci

$$f(x)=4x^2+24x+56$$

Ponieważ współczynnik przy x^2 jest dodatni, więc funkcja ta przyjmuje najmniejszą wartość dla argumentu $x=-\frac{24}{2\cdot 4}=-3$. Gdy $x=-3$, to rozpatrywany ciąg arytmetyczny ma postać $(-3,-1,1,3)$.

Sposób II

Niech $x-3$ będzie pierwszym wyrazem ciągu arytmetycznego o różnicy 2. Wtedy drugi, trzeci i czwarty wyraz tego ciągu są równe odpowiednio: $x-1$, $x+1$, $x+3$.
Suma kwadratów wszystkich czterech wyrazów tego ciagu jest więc równa

$$(x-3)^2+(x-1)^2+(x+1)^2+(x+3)^2$$

Sumę tę możemy zapisać w postaci

$$x^2-6x+9+x^2-2x+1+x^2+2x+1+x^2+6x+9$$
$$4x^2+20$$

Ponieważ kwadrat dowolnej liczby rzeczywistej jest nieujemny, więc suma ta jest najmniejsza, gdy $4x^2=0$, a więc, gdy $x=0$. Wtedy rozpatrywany ciąg ma postać $(-3,-1,1,3)$.

Zadanie 28. (0-2)

Ze zbioru $\{2,3,4,5,6,7,8\}$ siedmiu liczb losujemy bez zwracania kolejno dwa razy po jednej liczbie.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że suma wylosowanych liczb jest liczbą podzielną przez 3.

Przykładowe rozwiązanie

Sposób I

Przyjmijmy, że zdarzeniem elementarnym jest uporządkowana para (x,y) dwóch różnych liczb ze zbioru $\{2,3,4,5,6,7,8\}$. Wyznaczamy zbiór Ω wszystkich zdarzeń elementarnych

$$\begin{aligned}\Omega=\{&(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(2,7),(2,8),\\&(3,2),(3,4),(3,5),(3,6),(3,7),(3,8),\\&(4,2),(4,3),(4,5),(4,6),(4,7),(4,8),\\&(5,2),(5,3),(5,4),(5,6),(5,7),(5,8),\\&(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,7),(6,8),\end{aligned}$$

$$(7,2),(7,3),(7,4),(7,5),(7,6),(7,8),$$
$$(8,2),(8,3),(8,4),(8,5),(8,6),(8,7)\}$$

Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa $|\Omega| = 7 \cdot 6 = 42$.
Wyznaczmy zdarzenie A:

$$A = \{(2,4),(2,6),(3,6),(4,2),(4,5),(4,8),(5,4),$$
$$(5,7),(6,3),(7,2),(7,5),(7,8),(8,4),(8,7)\}$$

Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A jest równa $|A| = 14$.

Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest więc równe

$$P(A) = \frac{14}{42} = \frac{1}{3}$$

Uwaga
Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych możemy przedstawić za pomocą tabeli.

	2	3	4	5	6	7	8
2		5	6	7	8	9	10
3	5		7	8	9	10	11
4	6	7		9	10	11	12
5	7	8	9		11	12	13
6	8	9	10	11		13	14
7	9	10	11	12	13		15
8	10	11	12	13	14	15	

Zdarzenia elementarne odpowiadają polom o białym tle. W każde pole tabeli wpisujemy odpowiednią sumę wylosowanych liczb, a te sumy, które są podzielne przez 3 zaznaczamy kolorem zielonym.
Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa $|\Omega| = 7 \cdot 6 = 42$, a liczba zdarzeń elementarnych sprzyjającym zdarzeniu A jest równa $|A| = 2 \cdot 7 = 14$.
Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest więc równe

$$P(A) = \frac{14}{42} = \frac{1}{3}$$

Sposób II
Przyjmijmy, że zdarzeniem elementarnym jest dwuelementowy podzbiór $\{x, y\}$ dwóch różnych liczb ze zbioru $\{2,3,4,5,6,7,8\}$. Wyznaczamy zbiór Ω wszystkich zdarzeń elementarnych

$$\Omega = \{\{2,3\},\{2,4\},\{2,5\},\{2,6\},\{2,7\},\{2,8\},$$
$$\{3,4\},\{3,5\},\{3,6\},\{3,7\},\{3,8\},$$
$$\{4,5\},\{4,6\},\{4,7\},\{4,8\},$$
$$\{5,6\},\{5,7\},\{5,8\},$$
$$\{6,7\},\{6,8\},$$
$$\{7,8\}\}$$

Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa $|\Omega| = 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$.
Wyznaczmy zdarzenie A:

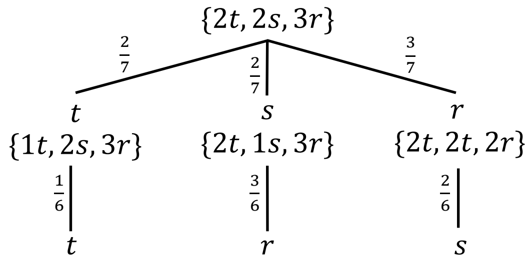
$$A = \{\{2,4\},\{2,6\},\{3,6\},\{4,5\},\{4,8\},\{5,7\},\{7,8\}\}$$

Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A jest równa $|A| = 7$.
Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest więc równe

$$P(A) = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$$

Sposób III

Suma dwóch liczb całkowitych jest podzielna przez 3 wtedy i tylko wtedy, gdy obie liczby są podzielne przez 3 albo gdy jedna daje przy dzieleniu przez 3 resztę 1, a druga resztę 2. W zbiorze $\{2,3,4,5,6,7,8\}$ mamy dwie liczby podzielne przez 3 (są to 3 i 6), dwie, które przy dzieleniu przez 3 dają resztę 1 (są to 4 i 7) oraz trzy, które przy dzieleniu przez 3 dają resztę 2 (są to 2, 5 i 8). Oznaczmy każdy rodzaj z tych liczb odpowiednio przez t, s, r. Potraktujmy nasze doświadczenie losowe jako zdarzenie dwuetapowe i sporządźmy drzewko ilustrujące to zdarzenie, zawierające tylko istotne gałęzie dla zdarzenie A.



Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest więc równe

$$P(A)=\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6}+\frac{2}{7}\cdot\frac{3}{6}+\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}=\frac{14}{42}=\frac{1}{3}$$

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody obliczenia prawdopodobieństwa zdarzenia A i uzyskanie poprawnego wyniku: $P(A)=\frac{14}{42}=\frac{7}{21}=\frac{1}{3}$.

1 pkt – przyjęcie, że zdarzeniem elementarnym jest uporządkowana para dwóch różnych liczb i wypisanie wszystkich zdarzeń elementarnych lub obliczenie/podanie liczby tych zdarzeń: $|\Omega|=7\cdot 6$ lub sporządzenie tabeli o 42 polach odpowiadających zdarzeniom elementarnym,

ALBO

– wypisanie (zaznaczenie w tabeli) wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A i niewypisanie żadnego niewłaściwego:
$(2,4),(2,6),(3,6),(4,2),(4,5),(4,8),(5,4),(5,7),(6,3),(7,2),(7,5),(7,8),(8,4),(8,7)$
lub zapisanie liczby tych zdarzeń elementarnych: $|A|=14$

ALBO

– przyjęcie, że zdarzeniem elementarnym jest dwuelementowy podzbiór różnych liczb i wypisanie wszystkich zdarzeń elementarnych lub obliczenie/podanie liczby tych zdarzeń: $|\Omega|=21$ lub sporządzenie tabeli o 21 polach odpowiadających zdarzeniom elementarnym,

ALBO

– wypisanie (zaznaczenie w tabeli) wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A i niewypisanie żadnego niewłaściwego: $\{2,4\},\{2,6\},\{3,6\},\{4,5\},\{4,8\},\{5,7\},\{7,8\}$
lub zapisanie liczby tych zdarzeń elementarnych: $|A|=7$

ALBO

– sporządzenie drzewa stochastycznego złożonego z 42 gałęzi ilustrującego opisane doświadczenie losowe

ALBO

– sporządzenie drzewa stochastycznego ilustrującego opisane doświadczenie losowe, złożonego z tylko z istotnych 14 gałęzi i zapisane prawdopodobieństwa na co najmniej jednym odcinku każdego poziomu drzewa

ALBO

– sporządzenie drzewa stochastycznego ilustrującego opisane doświadczenie losowe, złożonego z tylko z istotnych 3 gałęzi i zapisane prawdopodobieństw na co najmniej jednym odcinku każdego poziomu drzewa

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 29. (0-4)

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź boczna ma długość 15 i tworzy z płaszczyzną podstawy kąt, którego tangens jest równy $\frac{3}{4}$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Zasady oceniania

4 pkt – obliczenie objętości ostrosłupa: $V = 864$.

3 pkt – obliczenie a – długości krawędzi podstawy oraz wysokości ostrosłupa: $a = 12\sqrt{2}$, $|SO| = 9$

ALBO

– obliczenie pola podstawy ostrosłupa: $P = 288$ oraz wysokości ostrosłupa: $|SO| = 9$

2pkt – obliczenie wysokości ostrosłupa: $|SO| = 9$

ALBO

– obliczenie długości krawędzi podstawy ostrosłupa: $a = 12\sqrt{2}$

ALBO

– obliczenie długości przekątnej podstawy ostrosłupa: $|AC| = 24$

ALBO

– obliczenie objętości $V_1 = 32$ ostrosłupa, którego podstawą jest kwadrat o przekątnej długości 8 i wysokości 3, podobnego do rozpatrywanego ostrosłupa **oraz** zapisanie stosunku objętości $\frac{V_1}{V} = \left(\frac{1}{3}\right)^3$

1 pkt – zapisanie zależności wynikającej z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego AOS, np.: $(3x)^2 + (4x)^2 = 15^2$

ALBO

– obliczenie $\sin\alpha = \frac{3}{5}$

ALBO

– obliczenie $\cos\alpha = \frac{4}{5}$

ALBO

– obliczenie objętości $V_1 = 32$ ostrosłupa, którego podstawą jest kwadrat o przekątnej długości 8 i wysokości 3, podobnego do rozpatrywanego ostrosłupa **oraz** zapisanie skali podobieństwa $k = \frac{1}{3}$ lub $k = 3$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

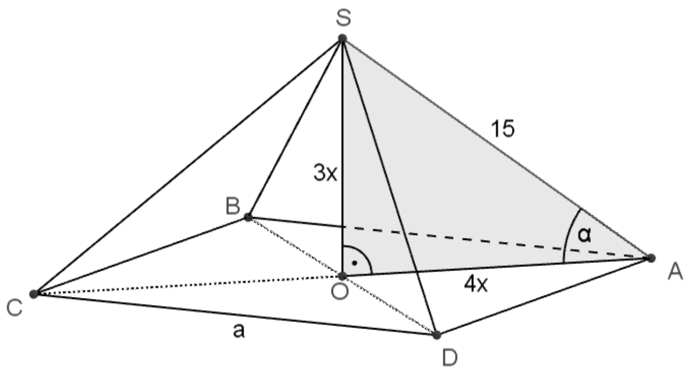
Uwaga

Jeżeli zdający przy obliczaniu objętości ostrosłupa zastosuje nieprawidłowy wzór $V = P_p \cdot H$ (zapominając o $\frac{1}{3}$), to za całe rozwiązanie może uzyskać maksymalnie **3 pkt**.

Przykładowe rozwiązanie

Sposób I

Wprowadźmy oznaczenia tak jak na rysunku: $|AS| = 15$, $|OS| = 3x$, $|OA| = 4x$, $|CD| = a$.



Stosując twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego AOS otrzymujemy

$$(3x)^2 + (4x)^2 = 15^2$$

$$9x^2 + 16x^2 = 225$$

$$25x^2 = 225$$

$$x^2 = 9$$

$$x = 3$$

Otrzymujemy więc: $|OS| = 9$, $|OA| = 12$.

Podstawą ostrosłupa jest kwadrat, którego przekątna ma długość $|AC| = 24$, więc pole tego kwadratu jest równe $P = \frac{1}{2} \cdot |AC|^2$.

$$P = \frac{1}{2} \cdot 24^2 = 288$$

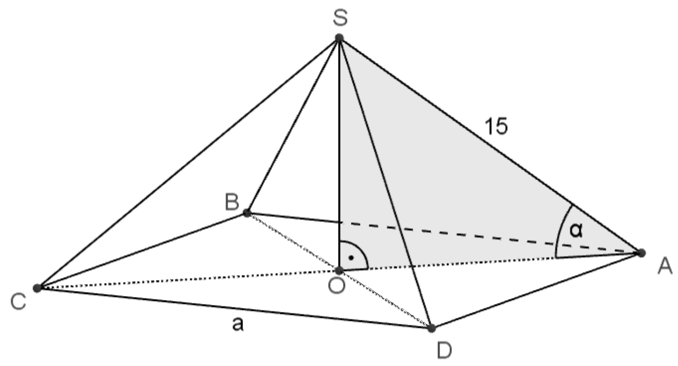
Obliczmy objętość ostrosłupa:

$$V = \frac{1}{3} \cdot P \cdot |OS|$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 288 \cdot 9 = 864$$

Sposób II

Wprowadźmy oznaczenia tak jak na rysunku: $|AS| = 15$, $|CD| = a$.



Korzystając ze wzorów trygonometrycznych obliczymy $\sin\alpha$ oraz $\cos\alpha$.

$$\begin{cases} \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \\ \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha \end{cases}$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{3}{4}$$

$$sin\,\alpha = \frac{3}{4} cos\,\alpha$$

$$\left(\frac{3}{4}\cos\alpha\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$$

$$\frac{25}{16}\cos^2\alpha = 1$$

$$\cos^2\alpha = \frac{16}{25}$$

Ponieważ α jest kątem ostrym, więc

$$\cos\alpha = \frac{4}{5}$$

$$\sin\alpha = \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5} = \frac{3}{5}$$

Obliczamy długości odcinków AO oraz SO.

$$\cos\alpha = \frac{|AO|}{|AS|}$$

$$\frac{4}{5} = \frac{|AO|}{15}$$

$$|AO| = 12$$

$$\sin\alpha = \frac{|SO|}{|AS|}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{|SO|}{15}$$

$$|SO| = 9$$

Podstawą ostrosłupa jest kwadrat, którego przekątna ma długość $|AC| = 24$, więc pole tego kwadratu jest równe $P = \frac{1}{2}\cdot|AC|^2$.

$$P = \frac{1}{2} \cdot 24^2 = 288$$

Obliczmy objętość ostrosłupa:

$$V = \frac{1}{3} \cdot P \cdot |SO|$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 288 \cdot 9 = 864$$

Sposób III

Rozpatrzmy ostrosłup, którego podstawą jest kwadrat o przekątnej długości 8 i wysokości 3. Krawędź boczna tego ostrosłupa ma długość równą

$$\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

Objętość tego ostrosłupa jest równa

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8^2 \cdot 3 = 32$$

Ostrosłup ten jest podobny do ostrosłupa opisanego z zadaniu, a skala tego podobieństwa jest równa $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$.

Ponieważ stosunek objętości brył podobnych jest równy sześcianowi skali ich podobieństwa, więc

$$\frac{V_1}{V} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

Gdzie V to objętość ostrosłupa opisanego z zadaniu. Zatem

$$V = 27 \cdot V_1 = 27 \cdot 32 = 864$$