



**Uzasadnianie własności i dowodzenie
twierdzeń na egzaminie gimnazjalnym**

**SAMORZĄDOWY OŚRODEK
DORADZTWA METODYCZNEGO
I DOSKONALENIA NAUCZYCIELI
w Kielcach**

*„Jeśli w matematyce nie byłoby piękna,
to zrozumiałe, że nie byłoby i samej matematyki.
Jakaż bowiem siła przyciągnęłaby do tej
niełatwej nauki największy geniusz rodzaju
ludzkiego.”*

M. A. Czajkowski



Przedstawiamy Państwu **Biuletyn „Uzasadnianie własności i dowodzenie twierdzeń na egzaminie gimnazjalnym”**.

Zawarte są w nim zadania dotyczące jednego z wymagań ogólnych kształcenia matematyki na III etapie edukacyjnym: rozumowania i argumentacji.

W prezentowanym Biuletynie znajdują się wybrane zadania z kwietniowych egzaminów w klasie trzeciej gimnazjum, z próbnych egzaminów gimnazjalnych z ostatnich lat oraz zadania z informatora Centralnej Komisji Egzaminacyjnej.

Ponadto dołączone zostały przykładowe zadania na uzasadnianie własności i dowodzenie twierdzeń.

Proponujemy rozwiązać je z uczniami.

Po zadaniu pierwszym, z badania diagnostycznego CKE w grudniu 2011 roku, prezentujemy przykładowe sposoby rozwiązania, wskazane przez Centralną Komisję Egzaminacyjną oraz ustalone przez CKE poziomy wykonania (ocenie holistyczne).

Na końcu biuletynu zamieszczone są adresy stron internetowych, na których można znaleźć rozwiązania wszystkich zadań udostępnionych przez CKE, a także literaturę, mogącą stanowić dodatkowe wsparcie w przygotowaniach do egzaminu gimnazjalnego w zakresie matematyki.

Mamy nadzieję, że Biuletyn będzie pomocny w prowadzeniu zajęć przygotowujących uczniów klas trzecich do egzaminów, ale również stanie się dodatkowym źródłem informacji i ćwiczeń we wcześniejszym okresie nauki matematyki w gimnazjum.

Życzymy wytrwałości w pracy.

Autorki:

Barbara Sękalska – doradca metodyczny matematyki

Jolanta Machnik – nauczyciel matematyki w ZSO nr 11 w Kielcach

Bożena Bugajska – nauczyciel matematyki w ZSO nr 28 w Kielcach

Zadanie 1. [Zadania diagnostyczne CKE – grudzień 2011]

Uzasadnij, że jeśli liczba jest podzielna przez 15 i przez 14, to jest podzielna przez 10.

Przykładowe sposoby rozwiązania:

I sposób

Jeżeli liczba jest podzielna przez 15, to jest podzielna przez 3 i 5.

Jeżeli liczba jest podzielna przez 14, to jest podzielna przez 2 i 7.

Ponieważ ta liczba jest podzielna jednocześnie przez 14 i 15, to znaczy, że jest podzielna przez 2, 3, 5 i 7. A jeśli jest podzielna przez 2 i 5 to jest podzielna przez 10.

II sposób

Liczba podzielna przez 14 jest też podzielna przez 2.

Liczba podzielna przez 15 jest też podzielna przez 5.

Skoro liczba jest podzielna przez 2 i 5, to oznacza, że liczba ta jest podzielna przez 10.

Poziom wykonania:

P6 – pełne rozwiązanie – 2 punkty

wyprowadzenie wniosku, że z podzielności liczby przez 2 i 5 wynika podzielność przez 10

P4 – zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale rozwiązanie nie zostało dokończony lub dalsza część rozwiązania zawiera poważne błędy merytoryczne – 1 punkt

zauważenie, że z podzielności przez 14 wynika podzielność przez 2 i że z podzielności przez 15 wynika podzielność przez 5

P0 – rozwiązanie niestanowiące postępu – 0 punktów
rozwiązanie błędne lub brak rozwiązania

Zadanie 2.

Uzasadnij, że jeśli liczba jest podzielna przez 12 i przez 14, to jest też podzielna

- a) przez 2
- b) przez 4
- c) przez 6
- d) przez 21
- e) przez 28
- f) przez 42
- g) przez 84.

Zadanie 3. [Egzamin gimnazjalny 2010].

Uczniowie klasy III wybierali przedstawiciela do samorządu szkolnego. Było troje kandydatów: Ola, Paweł i Romek. W klasie jest 32 uczniów i każdy z nich oddał jeden ważny głos. Zwyciężyła Ola, uzyskując mniej niż połowę głosów. Reszta głosów rozłożyła się równo między pozostałych kandydatów. Ile głosów otrzymała Ola, a po ile pozostali kandydaci? Znajdź i wypisz wszystkie możliwości. Uzasadnij, że nie ma więcej.

Zadanie 4.

Wykaż, że suma trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielna przez 3.

Zadanie 5.

Uzasadnij, że iloczyn trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielny

- a) przez 2
- b) przez 3
- c) przez 6.

Zadanie 6.

Wykaż, że suma czterech kolejnych liczb naturalnych nieparzystych jest podzielna przez 8.

Zadanie 7.

Uzasadnij, że suma trzech kolejnych liczb naturalnych parzystych jest liczbą podzielną przez 6.

Zadanie 8.

Uzasadnij, że suma liczby naturalnej i kwadratu tej liczby jest liczbą parzystą.

Zadanie 9.

Uzasadnij, że po odjęciu liczby naturalnej dodatniej od kwadratu tej liczby, otrzymamy liczbę podzielną przez 2.

Zadanie 10.

Wykaż, że suma liczby dwucyfrowej i liczby o przestawionych cyfrach jest liczbą podzielną przez 11.

Zadanie 11.

Wykaż, że liczba $3 \cdot 2^{100} + 2^{102} + 2^{103}$ jest podzielna

- a) przez 15
- b) przez 30
- c) przez 60.

Zadanie 12.

Wykaż, że liczba $2^9 + 4^5 + 8^4 + 16^2$ jest podzielna

- a) przez 2^8
- b) przez 23.

Zadanie 13.

Wykaż, że jeśli liczba a jest podzielna przez 2 i przez 3, to jej kwadrat jest podzielny

- a) przez 12
- b) przez 18.

Zadanie 14.

Liczba doskonała to liczba naturalna, która jest równa sumie wszystkich swoich dzielników mniejszych od niej samej.

- a) Wykaż, że liczby 6 i 28 są liczbami doskonałymi.
- b) Uzasadnij, że liczby 8 i 12 nie są doskonałe.

Zadanie 15.

Uzasadnij, że liczba 2197231245 jest podzielna

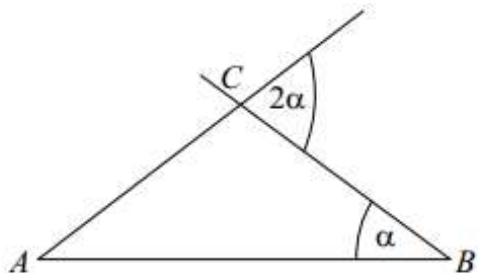
- przez 15
- przez 45.

Zadanie 16.

Wykaż, że ostatnią różną od zera cyfrą liczby $5^{45} \cdot 2^{46} \cdot 3^2$ jest 8.

Zadanie 17. [Informator o egzaminach, CKE - 2011/12]

Uzasadnij, że oba kąty przy podstawie AB trójkąta ABC są równe.



Zadanie 18.

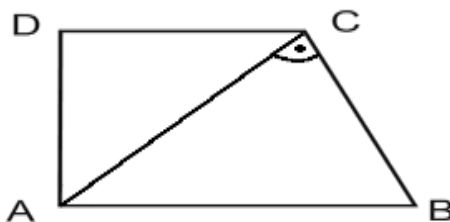
Uzasadnij, że trójkąt, w którym jeden kąt jest równy różnicy dwóch pozostałych, jest trójkątem prostokątnym.

Zadanie 19.

Uzasadnij, że jeżeli trapez jest prostokątny, to różnica kwadratów długości podstaw a i b ($a > b$) jest równa różnicy kwadratów długości jego przekątnych e i f ($e > f$).

Zadanie 20.

W trapezie prostokątnym $ABCD$, w którym $AB \parallel CD$ (rysunek poniżej), przekątna AC jest prostopadła do ramienia BC . Uzasadnij, że trójkąty ABC i ACD są podobne.



Zadanie 21.

Uzasadnij, że przekątna równoległoboku dzieli figurę na dwa trójkąty przystające.

Zadanie 22.

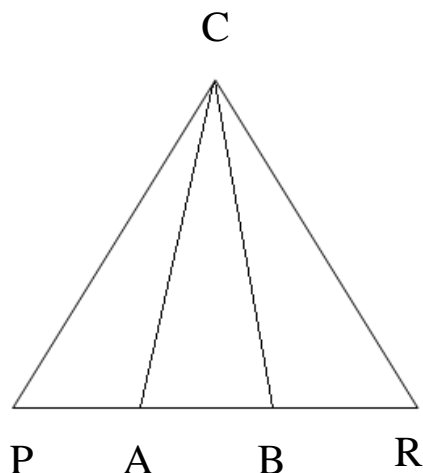
Podstawę AB trójkąta ABC podzielono na trzy równe odcinki: AD , DE i EB .

Uzasadnij, że

- trójkąty ADC , DEC i EBC mają równe pola
- stosunek pól trójkątów AEC i ABC wynosi 4:6.

Zadanie 23.

Dany jest trójkąt równoramienny ABC. Na przedłużeniu podstawy AB odkładamy odcinki PA i BR równej długości. Uzasadnij, że trójkąt CPR jest równoramienny.



Zadanie 24.

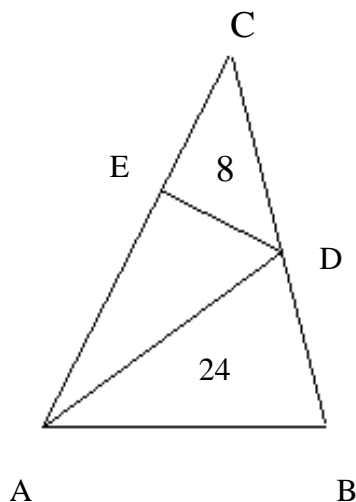
Uzasadnij, że prostokąt podobny w skali 3:1 do prostokąta o bokach a i b , ma pole równe $9ab$.

Zadanie 25.

Uzasadnij, że trapez, w którym obie podstawy są dwa razy mniejsze niż odpowiednie podstawy w trapezie ABCD, a wysokość jest dwa razy większa, ma takie samo pole jak trapez ABCD.

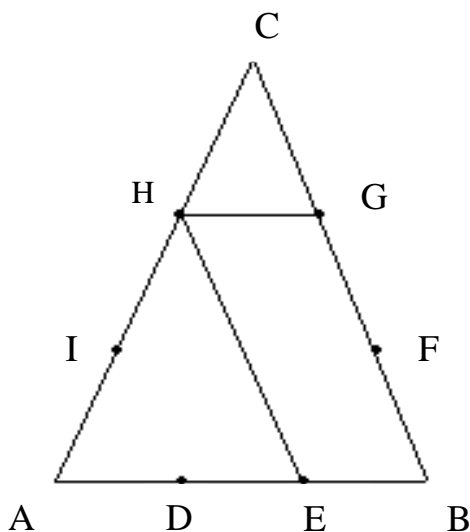
Zadanie 26.

W trójkącie ABC punkt D jest środkiem boku BC. Pola trójkątów ABD i EDC podane są na rysunku. Uzasadnij, że pole trójkąta ADE jest równe 16.



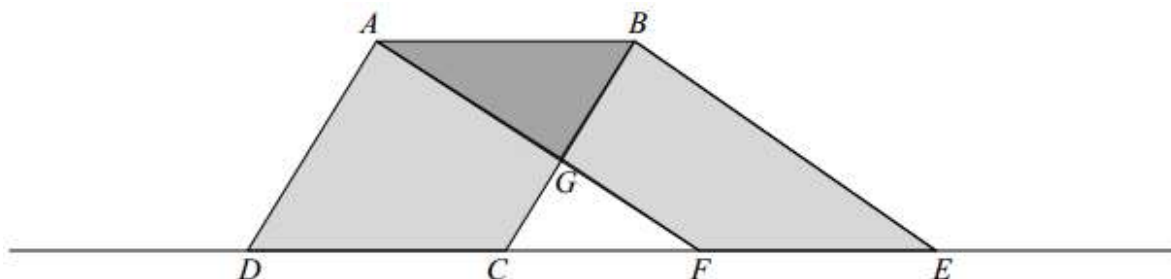
Zadanie 27.

Każdy bok trójkąta równobocznego ABC podzielono na trzy równe części, jak na rysunku obok. Uzasadnij, że trójkąt AEH i czworokąt $EBGH$ mają równe pola.



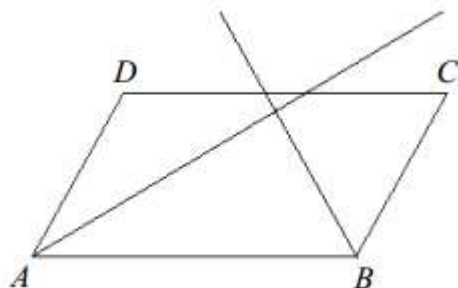
Zadanie 28. [Informator o egzaminach, CKE - 2011/12]

Na rysunku przedstawiono dwa równoległoboki $ABCD$ i $ABEF$. Uzasadnij, że czworokąty $CDAG$ oraz $EFGB$ mają równe pola.



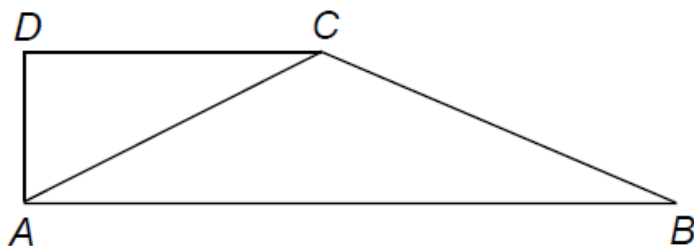
Zadanie 29 [Przykładowy zestaw zadań – CKE 2011/2012]

Uzasadnij, że dwusieczne kątów BAD i ABC równoległoboku $ABCD$ są prostopadłe.



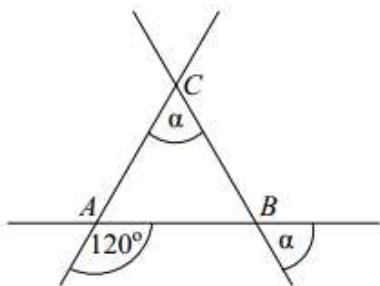
Zadanie 30. [Zadania diagnostyczne CKE listopad 2012].

Dany jest trapez prostokątny $ABCD$ o podstawach długości 22 cm, 10 cm i wysokości 5 cm. Odcinek AC jest przekątną tego trapezu. Oceń, czy trójkąt ABC jest równoramienny, odpowiedź uzasadnij.



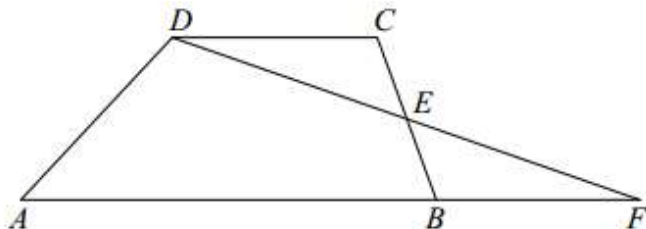
Zadanie 31. [Egzamin gimnazjalny 2012]

Trzy proste przecinające się w sposób przedstawiony na rysunku tworzą trójkąt ABC . Uzasadnij, że trójkąt ABC jest równoboczny.



Zadanie 32. [Egzamin gimnazjalny 2013]

Na rysunku przedstawiono trapez $ABCD$ i trójkąt AFD . Punkt E leży w połowie odcinka BC . Uzasadnij, że pole trapezu $ABCD$ i pole trójkąta AFD są równe.



Zadanie 33.

Punkt P leży na ramieniu AD trapezu $ABCD$ o podstawach AB i DC .

Wykaż, że kąt BPC trójkąta BPC jest sumą kątów DCP i ABP w trójkątach DCP i ABP .

Zadanie 34.

Uzasadnij, że pole kwadratu o przekątnej d jest równe $\frac{d^2}{2}$.

Zadanie 35.

Wysokość h poprowadzona z wierzchołka kąta prostego w trójkącie prostokątnym ABC dzieli przeciwległy bok na odcinki długości a i b . Wykaż, że $h^2 = a \cdot b$.

Adresy stron internetowych CKE, na których można znaleźć arkusze i rozwiązania zadań, zamieszczone w biuletynie

Zadanie 1.[Zadania diagnostyczne CKE – grudzień 2011]:

<http://www.cke.edu.pl/index.php/egzamin-gimnazjalny-left/gimnazjalne-arkusze-diagnostyczne-2011>

Zadanie 3.[Egzamin gimnazjalny 2010]:

<http://www.cke.edu.pl/index.php/2010-eg>

Zadanie 17.[Informator o egzaminach, CKE - 2011/12]:

<http://www.cke.edu.pl/index.php/egzamin-gimnazjalny-left?id=225:informatory-o-egzaminie-gimnazjalnym-od-roku-szkolnego-2011-2012-wraz-z-aneksami&catid=100:wersje-robocze>

Zadanie 28[Informator o egzaminach, CKE - 2011/12]:

http://www.cke.edu.pl/images/files/Gimnazjum_2011_2012/Informator_G1.pdf

Zadanie 29[Przykładowy zestaw zadań – CKE 2011/2012]:

<http://www.cke.edu.pl/index.php/egzamin-gimnazjalny-left/przykladowe-zestawy-zadan>

Zadanie 30.[Zadania diagnostyczne CKE listopad 2012].

<http://www.cke.edu.pl/index.php/egzamin-gimnazjalny-left/gimnazjalne-arkusze-diagnostyczne-2012>

Zadanie 31.[Egzamin gimnazjalny 2012]:

<http://www.cke.edu.pl/index.php/2012-eg>

Zadanie 32.[Egzamin gimnazjalny 2013]:

<http://www.cke.edu.pl/index.php/2013-eg>

Literatura

1. A. Cewe, M. Krawczyk, A. Magryś-Walczak, H. Nahorska, B. Zawistowska,
Przed egzaminem gimnazjalnym z matematyki od roku 2012, wyd. Podkowa 2011
2. Jerzy Janowicz, *Matematyka – repetytorium dla gimnazjum*, wyd. Nowa Era 2013
3. J. Walczak, U. Sawicka – Patrzalek, *Matematyka wokół nas. Gimnazjum; suplement klasa 1*, wyd. WSiP 2009 (wydanie zmienione 2011)
4. U. Sawicka – Patrzalek, J. Walczak, *Matematyka wokół nas, suplement. Gimnazjum klasa 2*, wyd. WSiP 2009 (wydanie zmienione 2011)
5. E. Duvnjak, E. Kokiernak – Jurkiewicz, *Matematyka wokół nas. Gimnazjum, zbiór zadań i testów, klasa 3*, wyd. WSiP 2010 (wydanie poprawione 2013)
6. A. Drążek, M. Wójcicka, *Matematyka wokół nas, gimnazjum - Poradnik nauczyciela 3*, wyd. WSiP 2013